OSNOVI METODE KONAČNIH ELEMENATA Predavanje VI

Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka
Departman za građevinarstvo i geodeziju
Katedra za konstrukcije
Prof. dr Andrija Rašeta
kabinet LG209
email: araseta@uns.ac.rs i araseta@gmail.com

OSNOVI METODE KONAČNIH ELEMENATA Predavanje VI

Klasična teorija savijanja ploča

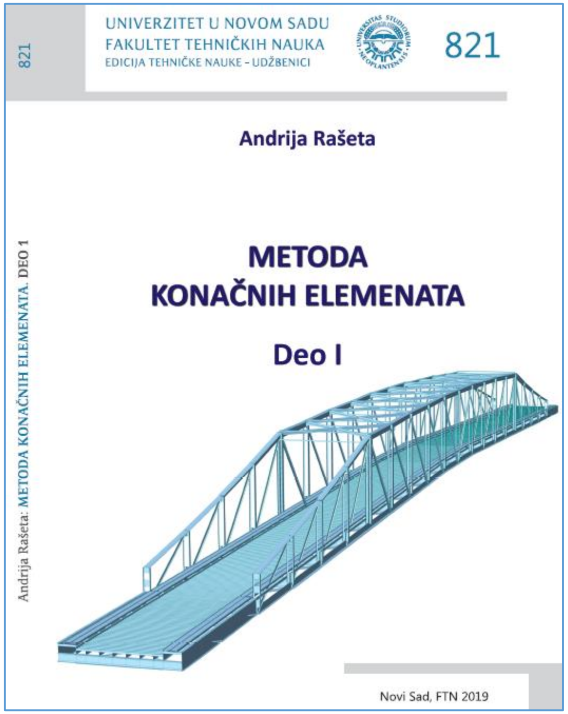
Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča

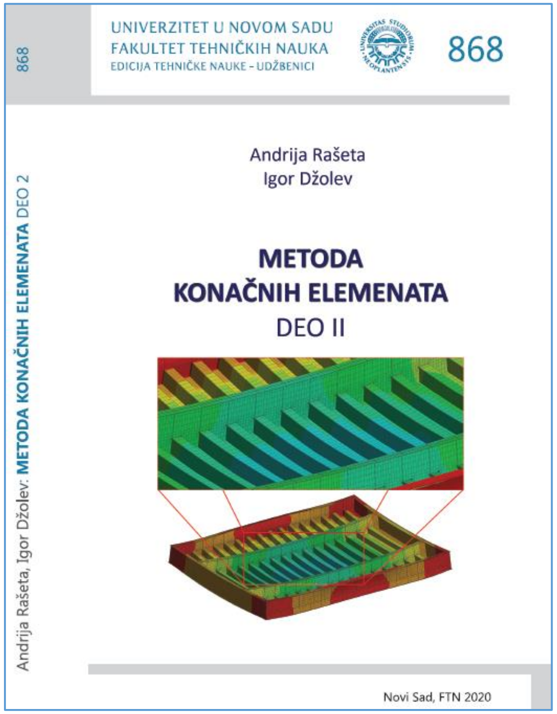
Ljuske

Linearna statička analiza

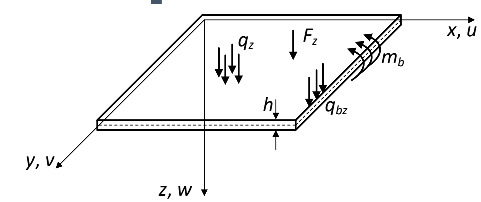
Literatura

- **Metoda konačnih elemenata, deo I**, A. Rašeta, FTN Novi Sad, 2019.
- **Metoda konačnih elemenata, deo II**, A. Rašeta, I. Džolev, FTN Novi Sad, 2020.





Rekapitulacija osnovnih jednačina linearne teorije elastičnosti. Savijanje tankih ploča

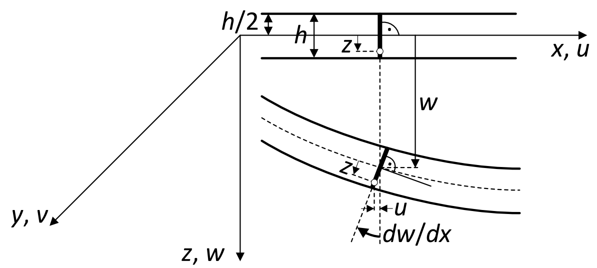


- **Komponente pomeranja**

$$u = u(x,y,z) = -z\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$v = v(x,y,z) = -z\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$w = w(x,y,z) = w(x,y)$$

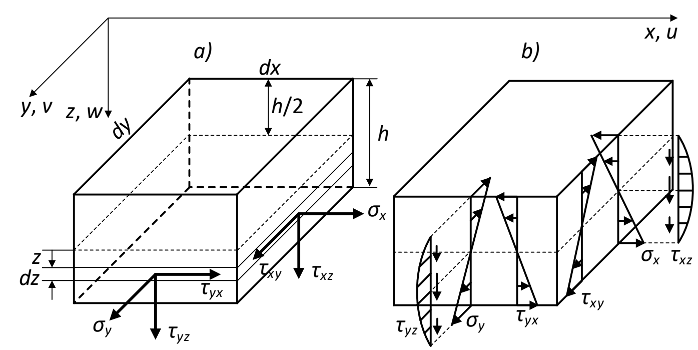


- **Komponente deformacije**

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad \varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad \varepsilon_z = 0$$

$$\gamma_{yx} = \gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = 0 \qquad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0$$

- **Veze između napona, deformacija i pomeranja**



$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$\sigma_z = 0 \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} = -(1-\nu)\frac{Ez}{1-\nu^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Normalni naponi σ_x, σ_y i smičući naponi $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ imaju linearnu promenu po debljini ploče. Smičući naponi τ_{xz} i τ_{yz} ne mogu da se odrede iz konstitutivnih zakona ($\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$) ali nisu jednaki nuli i imaju paraboličnu promenu (slično kao i u Ojler-Bernulijevoj teoriji savijanja grede)

Rekapitulacija osnovnih jednačina linearne teorije elastičnosti. Savijanje tankih ploča

- **Sile u presecima**

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

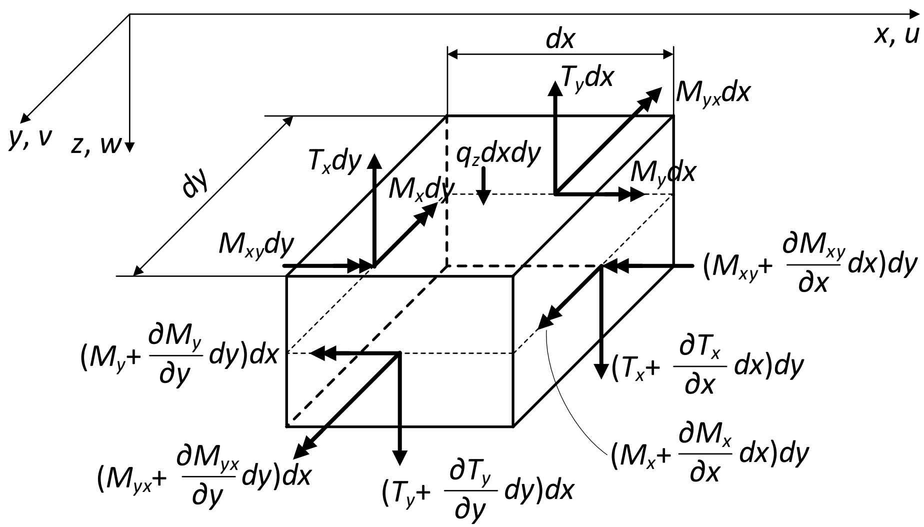
$$T_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \qquad T_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \qquad M_{xy} = M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

- **Uslovi ravnoteže**

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + q_z = 0$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - T_x = 0$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - T_y = 0$$



Rekapitulacija osnovnih jednačina linearne teorije elastičnosti. Savijanje tankih ploča

- **Uslovi ravnoteže**

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{yx}}{\partial y}-T_x=0\\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}-T_y=0\end{aligned}\right\}\quad \frac{\partial T_x}{\partial x}+\frac{\partial T_y}{\partial y}+q_z=0 \longrightarrow \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}=-q_z$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}M_x\\ M_y\\ M_{xy}\end{Bmatrix}=-\{q_z\}\qquad \mathbf{D}_e\boldsymbol{\sigma}=-\mathbf{q}$$

$$\mathbf{D}_e=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{Bmatrix}M_x\\ M_y\\ M_{xy}\end{Bmatrix}\qquad \mathbf{q}=\{q_z\}$$

- **Transverzalne sile određuju se iz uslova ravnoteže**

$$T_x=\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{yx}}{\partial y}=-\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\nu\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)$$

$$T_y=\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}=-\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\nu\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right)$$

Transverzalnim silama odgovara parabolična raspodela smičućih napona τ_{xz} i τ_{yz} po visini poprečnog preseka ploče (pravougaoni poprečni presek jedinične širine i visine *h*)

$$\tau_{xz}=\frac{3}{2h}\left[1-4\left(\frac{z}{h}\right)^2\right]T_x$$

$$\tau_{yz}=\frac{3}{2h}\left[1-4\left(\frac{z}{h}\right)^2\right]T_y$$

Rekapitulacija osnovnih jednačina linearne teorije elastičnosti. Savijanje tankih ploča

- **Veze između deformacije i pomeranja**

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k \mathbf{u} \qquad \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial^2/\partial x^2 \\ -\partial^2/\partial y^2 \\ -2\,\partial^2/\partial x\partial y \end{bmatrix} \{w\}$$

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$2\kappa_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{D}_k = -\begin{bmatrix} \partial^2/\partial x^2 \\ \partial^2/\partial y^2 \\ 2\,\partial^2/\partial x\partial y \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} = \{w\}$$

- **Veze između napona (sila u presecima) i deformacije**

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}$$

Rekapitulacija osnovnih jednačina linearne teorije elastičnosti. Savijanje tankih ploča

- **Diferencijalna jednačina savijanja**

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{yx}}{\partial y}-T_x=0\\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}-T_y=0\end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial T_x}{\partial x}+\frac{\partial T_y}{\partial y}+q_z=0 \longrightarrow \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}=-q_z$$

$$\left.\begin{aligned}M_x&=-K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\\ M_y&=-K\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\\ M_{xy}&=M_{yx}=-K(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right\} \longrightarrow \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}=-q_z$$

$$\big\downarrow$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=-\frac{q_z}{K} \qquad K=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Rekapitulacija osnovnih jednačina linearne teorije elastičnosti. Savijanje tankih ploča

- **Prirodni granični uslovi**
  - Granični uslovi po silama na konturi sa vektorom normale n i vektorom tangente t, koja u opštem slučaju može biti krivolinijska, zadaju se preko momenta savijanja M_n i zamenjujuće transverzalne sile $\bar{T}_n = T_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t}$
  - Za neopterećene slobodne konture ploče kod kojih je x = const. granični uslovi su

$$M_x = -K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \quad \bar{T}_x = T_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -K\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) = 0$$

  - Za neopterećene slobodne konture ploče kod kojih je y = const. granični uslovi su

$$M_y = -K\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \quad \bar{T}_y = T_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -K\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right) = 0$$

U MKE na bazi pomeranja (metoda pomeranja) prirodni granični uslovi mogu samo aproksimativno da se zadovolje

Rekapitulacija osnovnih jednačina linearne teorije elastičnosti. Savijanje tankih ploča

- **Esencijalni granični uslovi**
  - Potpuno uklještena kontura

$$w = 0 \qquad \frac{\partial w}{\partial n} = 0$$

    - vodeći računa da je ugib duž konture jednak nuli $\quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = 0 \qquad \dfrac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} = 0$
    - tj. momenti torzije M_{nt} jednaki su nuli
- **Mešoviti granični uslovi**
  - Slobodno oslonjena ivica

$$w = 0 \qquad M_n = -K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = 0$$

    - s obzirom na to da je ugib duž konture jednak nuli $\quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$
    - odnosno $M_n = -K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0$
  - Ako je ploča pravougaonog oblika slobodno oslonjena duž svih kontura, važi

$$w = 0 \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Rekapitulacija osnovnih jednačina linearne teorije elastičnosti. Savijanje tankih ploča

- **Potencijalna energija deformacije**

$$U = \frac{1}{2}\int_A \left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy}\right) dA$$

- odnosno koristeći $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k \mathbf{u}$ $\quad \mathbf{D}_k = -\begin{bmatrix} \partial^2/\partial x^2 \\ \partial^2/\partial y^2 \\ 2\,\partial^2/\partial x \partial y \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{u} = \{w\}$

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa} \qquad \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$2\kappa_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

- sledi $\quad U = \frac{1}{2}\int_A \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa}\, dA \qquad \mathbf{D} = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$

Pravougaoni KE sa 12 SS. Klasična teorija ploča

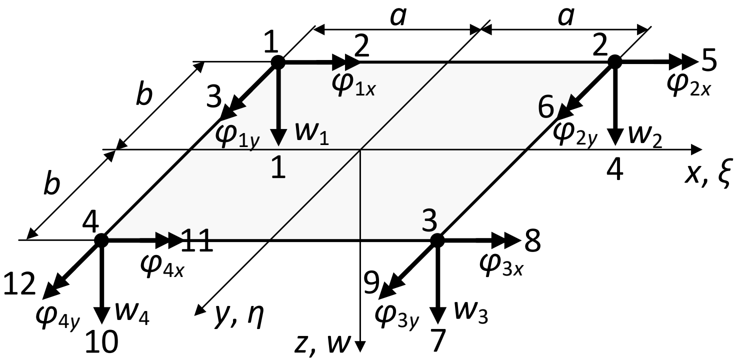
- Svaki čvor KE ima 3 stepena slobode (translatorno pomeranje u pravcu z ose i rotacije oko osa x i y), tj. KE ima ukupno **12 stepeni slobode**

$$\mathbf{d}^T = \{\mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2 \quad \mathbf{d}_3 \quad \mathbf{d}_4\}$$

$$\mathbf{d}_i^T = \{w_i \quad \varphi_{ix} \quad \varphi_{iy}\}, \qquad i = 1,2,3,4$$

$$\mathbf{R}^T = \{\mathbf{R}_1 \quad \mathbf{R}_2 \quad \mathbf{R}_3 \quad \mathbf{R}_4\}$$

$$\mathbf{R}_i^T = \{T_{iz} \quad M_{ix} \quad M_{iy}\}, \qquad i = 1,2,3,4$$



- Uglovi obrtanja u čvorovima KE izražavaju se preko pomeranja na sledeći način

$$\varphi_{ix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i \qquad \varphi_{iy} = -\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \qquad i = 1,2,3,4$$

Pravougaoni KE sa 12 SS. Klasična teorija ploča

- Funkcija pomeranja u polju KE definisana je nepotpunim polinomom četvrtog stepena u kome nedostaju tri člana, tj. x^4, y^4 i x^2y^2, pri čemu je očuvana simetrija

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + +\alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} \rightarrow w = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2 y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3 y \quad xy^3] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix}$$

- Raspodela rotacija poprečnih preseka u polju KE

$$\varphi_x = \frac{\partial w}{\partial y} = \alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_8 x^2 + 2\alpha_9 xy + 3\alpha_{10} y^2 + \alpha_{11} x^3 + 3\alpha_{12} xy^2$$

$$\varphi_x = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad x \quad 2y \quad 0 \quad x^2 \quad 2xy \quad 3y^2 \quad x^3 \quad 3xy^2] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\varphi_y = -\frac{\partial w}{\partial x} = -(\alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 3\alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 xy + \alpha_9 y^2 + 3\alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} y^3)$$

$$\varphi_y = [0 \quad -1 \quad 0 \quad -2x \quad -y \quad 0 \quad -3x^2 \quad -2xy \quad -y^2 \quad 0 \quad -3x^2 y \quad -y^3] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix}$$

Pravougaoni KE sa 12 SS. Klasična teorija ploča

- Vektor generalisanih pomeranja čvorova KE glasi

$$\mathbf{d} = \mathbf{C}\boldsymbol{\alpha}$$

- Zamenom koordinata čvorova (granični uslovi) sledi

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -a & -b & a^2 & ab & b^2 & -a^3 & -a^2b & -ab^2 & -b^3 & a^3b & ab^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a & -2b & 0 & a^2 & 2ab & 3b^2 & -a^3 & -3ab^2 \\ 0 & -1 & 0 & 2a & b & 0 & -3a^2 & -2ab & -b^2 & 0 & 3a^2b & b^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -a & b & a^2 & -ab & b^2 & -a^3 & a^2b & -ab^2 & b^3 & -a^3b & -ab^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a & 2b & 0 & a^2 & -2ab & 3b^2 & -a^3 & -3ab^2 \\ 0 & -1 & 0 & 2a & -b & 0 & 3a^2 & 2ab & -b^2 & 0 & -3a^2b & -b^3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{8ab}\begin{bmatrix} 2ab & ab^2 & -a^2b & 2ab & ab^2 & a^2b & 2ab & -ab^2 & a^2b & 2ab & -ab^2 & -a^2b \\ -3b & -b^2 & ab & 3b & b^2 & ab & 3b & -b^2 & ab & -3b & b^2 & ab \\ -3a & -ab & a^2 & -3a & -ab & -a^2 & 3a & -ab & a^2 & 3a & -ab & -a^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{a}{b^2} & \frac{a}{b} & 0 & \frac{a}{b^2} & \frac{a}{b} & 0 & -\frac{a}{b^2} & \frac{a}{b} & 0 & -\frac{a}{b^2} & \frac{a}{b} & 0 \\ -\frac{1}{a^2} & 0 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} & 0 & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} & 0 & -\frac{1}{a} \\ -\frac{1}{b^2} & -\frac{1}{b} & 0 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} & 0 & -\frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} & 0 & \frac{1}{b^2} & -\frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix}$$

Pravougaoni KE sa 12 SS. Klasična teorija ploča

- **Matrica IF**

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\mathbf{C}^{-1} \qquad \mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2 \quad \mathbf{N}_3 \quad \mathbf{N}_4]$$

čvor 1

$$\mathbf{N}_1^T = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} \frac{(-a+x)(b-y)\left(ab^2x + b^2x^2 + a^2(-2b^2 + by + y^2)\right)}{a^3b^3} \\ \frac{(a-x)(b-y)^2(b+y)}{ab^2} \\ -\frac{(a-x)^2(a+x)(b-y)}{a^2b} \end{bmatrix}$$

čvor 2

$$\mathbf{N}_2^T = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} \frac{(a+x)(b-y)\left(ab^2x - b^2x^2 + a^2(b-y)(2b+y)\right)}{a^3b^3} \\ \frac{(a+x)(b-y)^2(b+y)}{ab^2} \\ \frac{(a-x)(a+x)^2(b-y)}{a^2b} \end{bmatrix}$$

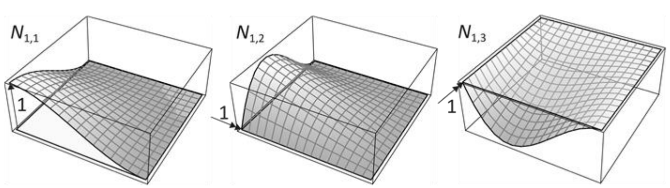
čvor 3

$$\mathbf{N}_3^T = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} \frac{(a+x)(b+y)\left(ab^2x - b^2x^2 + a^2(2b-y)(b+y)\right)}{a^3b^3} \\ -\frac{(a+x)(b-y)(b+y)^2}{ab^2} \\ \frac{(a-x)(a+x)^2(b+y)}{a^2b} \end{bmatrix}$$

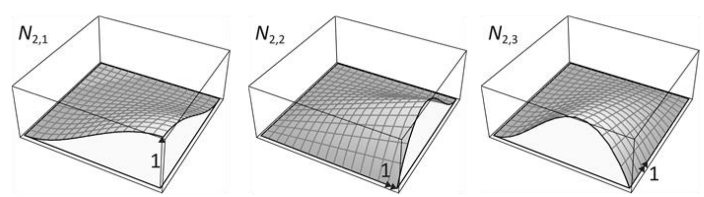
čvor 4

$$\mathbf{N}_4^T = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} \frac{(a-x)(b+y)(b^2(a-x)(2a+x) + a^2by - a^2y^2)}{a^3b^3} \\ -\frac{(a-x)(b-y)(b+y)^2}{ab^2} \\ -\frac{(a-x)^2(a+x)(b+y)}{a^2b} \end{bmatrix}$$

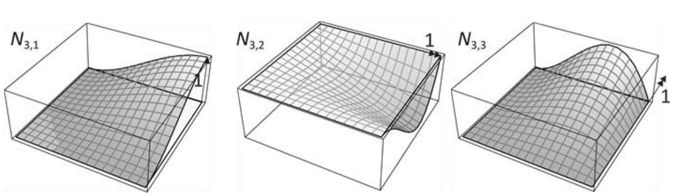
čvor 1



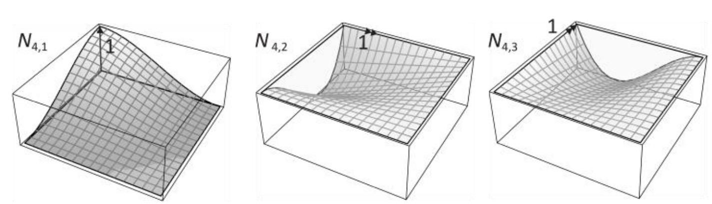
čvor 2



čvor 3



čvor 4



Pravougaoni KE sa 12 SS. Klasična teorija ploča

- **Matrica B**

$$\mathbf{B}=\mathbf{D}_k\mathbf{N}=-\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\mathbf{N}_1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2\mathbf{N}_2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2\mathbf{N}_3}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2\mathbf{N}_4}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2\mathbf{N}_1}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2\mathbf{N}_2}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2\mathbf{N}_3}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2\mathbf{N}_4}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2\mathbf{N}_1}{\partial x\partial y} & 2\dfrac{\partial^2\mathbf{N}_2}{\partial x\partial y} & 2\dfrac{\partial^2\mathbf{N}_3}{\partial x\partial y} & 2\dfrac{\partial^2\mathbf{N}_4}{\partial x\partial y} \end{bmatrix}_{3x12}$$

$$\mathbf{B}=\left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:ccc} \dfrac{3x(-b+y)}{4a^3b} & 0 & -\dfrac{(a-3x)(b-y)}{4a^2b} & \dfrac{3x(b-y)}{4a^3b} & 0 & \dfrac{(a+3x)(b-y)}{4a^2b} & \dfrac{3x(b+y)}{4a^3b} & 0 & \dfrac{(a+3x)(b+y)}{4a^2b} & -\dfrac{3x(b+y)}{4a^3b} & 0 & -\dfrac{(a-3x)(b+y)}{4a^2b} \\ \dfrac{3(-a+x)y}{4ab^3} & \dfrac{(a-x)(b-3y)}{4ab^2} & 0 & -\dfrac{3(a+x)y}{4ab^3} & \dfrac{(a+x)(b-3y)}{4ab^2} & 0 & \dfrac{3(a+x)y}{4ab^3} & -\dfrac{(a+x)(b+3y)}{4ab^2} & 0 & \dfrac{3(a-x)y}{4ab^3} & -\dfrac{(a-x)(b+3y)}{4ab^2} & 0 \\ \dfrac{3b^2x^2+a^2(-4b^2+3y^2)}{4a^3b^3} & -\dfrac{(b-y)(b+3y)}{4ab^2} & \dfrac{(a-x)(a+3x)}{4a^2b} & \dfrac{-3b^2x^2+a^2(4b^2-3y^2)}{4a^3b^3} & \dfrac{(b-y)(b+3y)}{4ab^2} & \dfrac{(a-3x)(a+x)}{4a^2b} & \dfrac{3b^2x^2+a^2(-4b^2+3y^2)}{4a^3b^3} & \dfrac{(b-3y)(b+y)}{4ab^2} & -\dfrac{(a-3x)(a+x)}{4a^2b} & \dfrac{-3b^2x^2+a^2(4b^2-3y^2)}{4a^3b^3} & -\dfrac{(b-3y)(b+y)}{4ab^2} & -\dfrac{(a-x)(a+3x)}{4a^2b} \end{array}\right]$$

Pravougaoni KE sa 12 SS. Klasična teorija ploča

- **Matrica krutosti** $$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\,dV = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\,dx\,dy$$

Kolone 1 do 3

$$\mathbf{k} = \frac{Eh^3}{48ab\left(1-\nu^2\right)} \cdot \begin{bmatrix}
\frac{4\left(a^4+b^4\right)}{a^2b^2}+\frac{2}{5}(7-2\nu) & \frac{4a^2}{b}+\frac{2}{5}(b+4b\nu) & -\frac{4b^2}{a}-\frac{2}{5}a(1+4\nu) \\
\frac{4a^2}{b}+\frac{2}{5}(b+4b\nu) & \frac{16}{15}\left(5a^2-b^2(-1+\nu)\right) & -4ab\nu \\
-\frac{4b^2}{a}-\frac{2}{5}a(1+4\nu) & -4ab\nu & \frac{16}{15}\left(5b^2-a^2(-1+\nu)\right) \\
\frac{2a^2}{b^2}-\frac{4b^2}{a^2}+\frac{2}{5}(-7+2\nu) & \frac{2a^2}{b}-\frac{2}{5}(b+4b\nu) & \frac{4b^2}{a}-\frac{2}{5}a(-1+\nu) \\
\frac{2a^2}{b}-\frac{2}{5}(b+4b\nu) & \frac{8}{15}\left(5a^2+2b^2(-1+\nu)\right) & 0 \\
-\frac{4b^2}{a}+\frac{2}{5}a(-1+\nu) & 0 & \frac{4}{15}\left(10b^2+a^2(-1+\nu)\right) \\
\frac{2}{5}\left(7-\frac{5\left(a^4+b^4\right)}{a^2b^2}-2\nu\right) & -\frac{2\left(5a^2+b^2(-1+\nu)\right)}{5b} & \frac{2\left(5b^2+a^2(-1+\nu)\right)}{5a} \\
\frac{2\left(5a^2+b^2(-1+\nu)\right)}{5b} & \frac{4}{15}\left(5a^2-b^2(-1+\nu)\right) & 0 \\
-\frac{2\left(5b^2+a^2(-1+\nu)\right)}{5a} & 0 & \frac{4}{15}\left(5b^2-a^2(-1+\nu)\right) \\
-\frac{4a^2}{b^2}+\frac{2b^2}{a^2}+\frac{2}{5}(-7+2\nu) & -\frac{4a^2}{b}+\frac{2}{5}b(-1+\nu) & -\frac{2b^2}{a}+\frac{2}{5}a(1+4\nu) \\
\frac{4a^2}{b}-\frac{2}{5}b(-1+\nu) & \frac{4}{15}\left(10a^2+b^2(-1+\nu)\right) & 0 \\
-\frac{2b^2}{a}+\frac{2}{5}a(1+4\nu) & 0 & \frac{8}{15}\left(5b^2+2a^2(-1+\nu)\right)
\end{bmatrix}$$

Kolone 4 do 6

$$\begin{matrix}
\frac{2a^2}{b^2}-\frac{4b^2}{a^2}+\frac{2}{5}(-7+2\nu) & \frac{2a^2}{b}-\frac{2}{5}(b+4b\nu) & -\frac{4b^2}{a}+\frac{2}{5}a(-1+\nu) \\
\frac{2a^2}{b}-\frac{2}{5}(b+4b\nu) & \frac{8}{15}\left(5a^2+2b^2(-1+\nu)\right) & 0 \\
\frac{4b^2}{a}-\frac{2}{5}a(-1+\nu) & 0 & \frac{4}{15}\left(10b^2+a^2(-1+\nu)\right) \\
\frac{4\left(a^4+b^4\right)}{a^2b^2}+\frac{2}{5}(7-2\nu) & \frac{4a^2}{b}+\frac{2}{5}(b+4b\nu) & \frac{4b^2}{a}+\frac{2}{5}a(1+4\nu) \\
\frac{4a^2}{b}+\frac{2}{5}(b+4b\nu) & \frac{16}{15}\left(5a^2-b^2(-1+\nu)\right) & 4ab\nu \\
\frac{4b^2}{a}+\frac{2}{5}a(1+4\nu) & 4ab\nu & \frac{16}{15}\left(5b^2-a^2(-1+\nu)\right) \\
-\frac{4a^2}{b^2}+\frac{2b^2}{a^2}+\frac{2}{5}(-7+2\nu) & -\frac{4a^2}{b}+\frac{2}{5}b(-1+\nu) & \frac{2b^2}{a}-\frac{2}{5}a(1+4\nu) \\
\frac{4a^2}{b}-\frac{2}{5}b(-1+\nu) & \frac{4}{15}\left(10a^2+b^2(-1+\nu)\right) & 0 \\
\frac{2b^2}{a}-\frac{2}{5}a(1+4\nu) & 0 & \frac{8}{15}\left(5b^2+2a^2(-1+\nu)\right) \\
\frac{2}{5}\left(7-\frac{5\left(a^4+b^4\right)}{a^2b^2}-2\nu\right) & -\frac{2\left(5a^2+b^2(-1+\nu)\right)}{5b} & -\frac{2\left(5b^2+a^2(-1+\nu)\right)}{5a} \\
\frac{2\left(5a^2+b^2(-1+\nu)\right)}{5b} & \frac{4}{15}\left(5a^2-b^2(-1+\nu)\right) & 0 \\
\frac{2\left(5b^2+a^2(-1+\nu)\right)}{5a} & 0 & \frac{4}{15}\left(5b^2-a^2(-1+\nu)\right)
\end{matrix}$$

Pravougaoni KE sa 12 SS. Klasična teorija ploča

- **Matrica krutosti** $\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}dV = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}dxdy$

Kolone 7 do 9

$\frac{2}{5}\left(7-\frac{5\left(a^4+b^4\right)}{a^2b^2}-2\nu\right)$	$\frac{2\left(5a^2+b^2\left(-1+\nu\right)\right)}{5b}$	$-\frac{2\left(5b^2+a^2\left(-1+\nu\right)\right)}{5a}$
$-\frac{2\left(5a^2+b^2\left(-1+\nu\right)\right)}{5b}$	$\frac{4}{15}\left(5a^2-b^2\left(-1+\nu\right)\right)$	0
$\frac{2\left(5b^2+a^2\left(-1+\nu\right)\right)}{5a}$	0	$\frac{4}{15}\left(5b^2-a^2\left(-1+\nu\right)\right)$
$-\frac{4a^2}{b^2}+\frac{2b^2}{a^2}+\frac{2}{5}\left(-7+2\nu\right)$	$\frac{4a^2}{b}-\frac{2}{5}b\left(-1+\nu\right)$	$\frac{2b^2}{a}-\frac{2}{5}a\left(1+4\nu\right)$
$-\frac{4a^2}{b}+\frac{2}{5}b\left(-1+\nu\right)$	$\frac{4}{15}\left(10a^2+b^2\left(-1+\nu\right)\right)$	0
$\frac{2b^2}{a}-\frac{2}{5}a\left(1+4\nu\right)$	0	$\frac{8}{15}\left(5b^2+2a^2\left(-1+\nu\right)\right)$
$\frac{4\left(a^4+b^4\right)}{a^2b^2}+\frac{2}{5}\left(7-2\nu\right)$	$-\frac{4a^2}{b}-\frac{2}{5}\left(b+4b\nu\right)$	$\frac{4b^2}{a}+\frac{2}{5}a\left(1+4\nu\right)$
$-\frac{4a^2}{b}-\frac{2}{5}\left(b+4b\nu\right)$	$\frac{16}{15}\left(5a^2-b^2\left(-1+\nu\right)\right)$	$-4ab\nu$
$\frac{4b^2}{a}+\frac{2}{5}a\left(1+4\nu\right)$	$-4ab\nu$	$\frac{16}{15}\left(5b^2-a^2\left(-1+\nu\right)\right)$
$\frac{2a^2}{b^2}-\frac{4b^2}{a^2}+\frac{2}{5}\left(-7+2\nu\right)$	$\frac{2}{5}\left(-\frac{5a^2}{b}+b+4b\nu\right)$	$-\frac{4b^2}{a}+\frac{2}{5}a\left(-1+\nu\right)$
$\frac{2}{5}\left(-\frac{5a^2}{b}+b+4b\nu\right)$	$\frac{8}{15}\left(5a^2+2b^2\left(-1+\nu\right)\right)$	0
$\frac{4b^2}{a}-\frac{2}{5}a\left(-1+\nu\right)$	0	$\frac{4}{15}\left(10b^2+a^2\left(-1+\nu\right)\right)$

Kolone 10 do 12

$-\frac{4a^2}{b^2}+\frac{2b^2}{a^2}+\frac{2}{5}\left(-7+2\nu\right)$	$\frac{4a^2}{b}-\frac{2}{5}b\left(-1+\nu\right)$	$-\frac{2b^2}{a}+\frac{2}{5}a\left(1+4\nu\right)$
$-\frac{4a^2}{b}+\frac{2}{5}b\left(-1+\nu\right)$	$\frac{4}{15}\left(10a^2+b^2\left(-1+\nu\right)\right)$	0
$-\frac{2b^2}{a}+\frac{2}{5}a\left(1+4\nu\right)$	0	$\frac{8}{15}\left(5b^2+2a^2\left(-1+\nu\right)\right)$
$\frac{2}{5}\left(7-\frac{5\left(a^4+b^4\right)}{a^2b^2}-2\nu\right)$	$\frac{2\left(5a^2+b^2\left(-1+\nu\right)\right)}{5b}$	$\frac{2\left(5b^2+a^2\left(-1+\nu\right)\right)}{5a}$
$-\frac{2\left(5a^2+b^2\left(-1+\nu\right)\right)}{5b}$	$\frac{4}{15}\left(5a^2-b^2\left(-1+\nu\right)\right)$	0
$-\frac{2\left(5b^2+a^2\left(-1+\nu\right)\right)}{5a}$	0	$\frac{4}{15}\left(5b^2-a^2\left(-1+\nu\right)\right)$
$\frac{2a^2}{b^2}-\frac{4b^2}{a^2}+\frac{2}{5}\left(-7+2\nu\right)$	$\frac{2}{5}\left(-\frac{5a^2}{b}+b+4b\nu\right)$	$\frac{4b^2}{a}-\frac{2}{5}a\left(-1+\nu\right)$
$\frac{2}{5}\left(-\frac{5a^2}{b}+b+4b\nu\right)$	$\frac{8}{15}\left(5a^2+2b^2\left(-1+\nu\right)\right)$	0
$-\frac{4b^2}{a}+\frac{2}{5}a\left(-1+\nu\right)$	0	$\frac{4}{15}\left(10b^2+a^2\left(-1+\nu\right)\right)$
$\frac{4\left(a^4+b^4\right)}{a^2b^2}+\frac{2}{5}\left(7-2\nu\right)$	$-\frac{4a^2}{b}-\frac{2}{5}\left(b+4b\nu\right)$	$-\frac{4b^2}{a}-\frac{2}{5}a\left(1+4\nu\right)$
$-\frac{4a^2}{b}-\frac{2}{5}\left(b+4b\nu\right)$	$\frac{16}{15}\left(5a^2-b^2\left(-1+\nu\right)\right)$	$4ab\nu$
$-\frac{4b^2}{a}-\frac{2}{5}a\left(1+4\nu\right)$	$4ab\nu$	$\frac{16}{15}\left(5b^2-a^2\left(-1+\nu\right)\right)$

Pravougaoni KE sa 12 SS. Klasična teorija ploča

- **Raspodela deformacijskih veličina u polju KE**

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\kappa_x \quad \kappa_y \quad 2\kappa_{xy}\}^T = \mathbf{Bd}$$

- **Raspodela sila u presecima**

$$\boldsymbol{\sigma} = \{M_x \quad M_y \quad M_{xy}\}^T = \mathbf{DBd} = \mathbf{Sd} \qquad \mathbf{S} = \mathbf{DB}$$

- **Vektor ekvivalentnog opterećenja**

$$\mathbf{Q} = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \mathbf{N}^T \mathbf{q}_z(x,y)\,dx\,dy$$

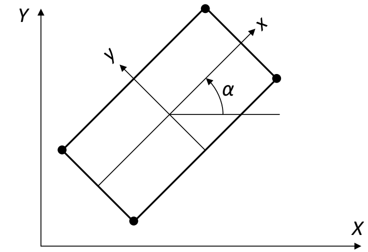
  - Ako po površini KE deluje jednako raspodeljeno opterećenje q_z vektor ekvivalentnog opterećenja glasi

$$\mathbf{Q}^T = q_z ab\left\{1 \quad \frac{b}{3} \quad -\frac{a}{3} \quad 1 \quad \frac{b}{3} \quad \frac{a}{3} \quad 1 \quad -\frac{b}{3} \quad \frac{a}{3} \quad 1 \quad -\frac{b}{3} \quad -\frac{a}{3}\right\}$$

Pravougaoni KE sa 12 SS. Klasična teorija ploča

- Ako je pravougaona ploča proizvoljno orijentisana u globalnom Dekartovom koordinatnom sistemu *XY*

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}\mathbf{T}_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{T}_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{T}_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{T}_4\end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}_i=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}, \qquad i=1,2,3,4$$



- Momenti savijanja M_x i M_y menjaju se linearno duž osa x i y
- Moment torzije M_{xy} menja se po paraboli
- Raspodela pomeranja duž ivice KE opisana je funkcijom trećeg stepena i može jednoznačno da se odredi na osnovu 4 stepena slobode u čvorovima na krajevima posmatrane ivice (pomeranje i obrtanje u svakom od čvorova na krajevima posmatrane ivice)
- Duž ivica KE jednoznačno su opisani i prvi izvodi (obrtanja) po koordinati u pravcu posmatrane ivice

Pravougaoni KE sa 12 SS. Klasična teorija ploča

- Prvi izvodi po koordinati upravno na posmatranu ivicu, koji se menjaju po funkciji trećeg stepena, ne mogu jednoznačno da se odrede jer su na raspolaganju samo dva stepena slobode u čvorovima na krajevima posmatrane ivice, odnosno npr. za ivicu sa koordinatom $x=-a$ na raspolaganju su obrtanja u čvorovima 1 i 4, tj. φ_{1y} i φ_{4y}
- S obzirom na prethodno, KE koji ima 12 stepeni slobode spada u grupu **nekonformnih** jer ne ispunjava zahtevani C^1 kontinuitet
- Nepotpunost polinoma funkcije pomeranja usporava konvergenciju rešenja pa je ovo još jedan nedostatak
- Konvergencija rešenja može da se postigne jer su ispunjeni uslovi za konvergenciju rešenja nekonformnih konačnih elemenata (dokazuje se *patch* testom)
- KE su uveli Adini, Clough i Melosh pa se naziva **ACM element**

Pravougaoni KE sa 12 SS. Klasična teorija ploča

- Funkcija pomeranja može da se prikaže i u prirodnim koordinatama

$$w(\xi,\eta) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi^2 + \alpha_5\xi\eta + \alpha_6\eta^2 + \alpha_7\xi^3 + \alpha_8\xi^2\eta + \alpha_9\xi\eta^2 + \alpha_{10}\eta^3 + \alpha_{11}\xi^3\eta + \alpha_{12}\xi\eta^3$$

  - gde su veze između Dekartovih i prirodnih koordinata

$$\xi = \frac{x}{a}, \qquad \eta = \frac{y}{b}$$

- Uglovi obrtanja određuju se na sledeći način

$$\varphi_x = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{b}\frac{\partial w}{\partial \eta} \qquad \varphi_y = -\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial \xi}$$

- Koristeći prirodne koordinate do IF dolazi se analognim postupkom kao i kod primene Dekartovih koordinata

$$\mathbf{N}_i^T(\xi,\eta) = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(2+\xi_i\xi+\eta_i\eta-\xi^2-\eta^2)\\ b(1+\xi_i\xi)(\eta_i+\eta)(\eta^2-1)\\ -a(\xi_i+\xi)(\xi^2-1)(1+\eta_i\eta)\end{bmatrix}, \qquad i = 1,2,3,4$$

Pravougaoni KE sa 12 SS. Klasična teorija ploča

- **Matrica B**

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_k\mathbf{N} = -\left\{\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \quad \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \quad \frac{2}{ab}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\right\}^T [\mathbf{N}(\xi,\eta)]$$

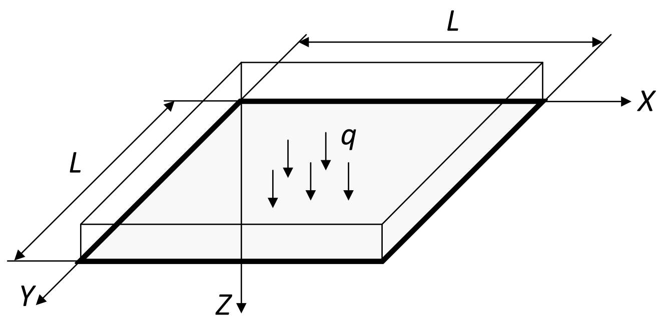
- **Matrica krutosti i vektor ekvivalentnog opterećenja**

$$\mathbf{k} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{B}^T(\xi,\eta)\mathbf{D}\mathbf{B}(\xi,\eta)\det\mathbf{J}\,d\xi d\eta \qquad \mathbf{Q} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{N}^T(\xi,\eta)\mathbf{q}(\xi,\eta)\det\mathbf{J}\,d\xi d\eta$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\xi} \\ \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \qquad \det\mathbf{J} = ab$$

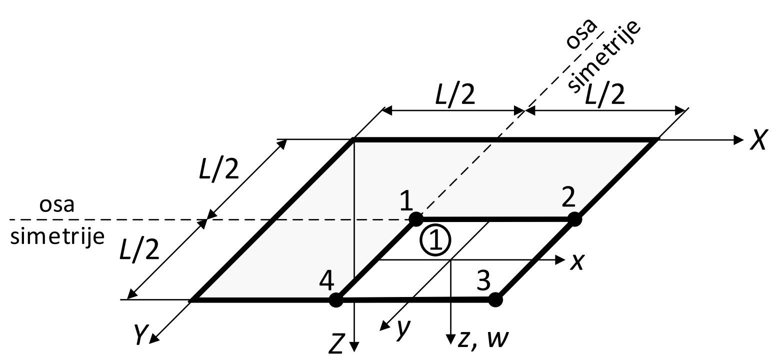
Pravougaoni KE sa 12 SS. Klasična teorija ploča. Primer

- Podaci: jednako raspodeljeno opterećenje q_z = 10 kN/m^2, modul elastičnosti E = 210·10^6 kPa, Poasonov koeficijent ν = 0,3, raspon L = 1,0 m i debljina h = 0,01 m



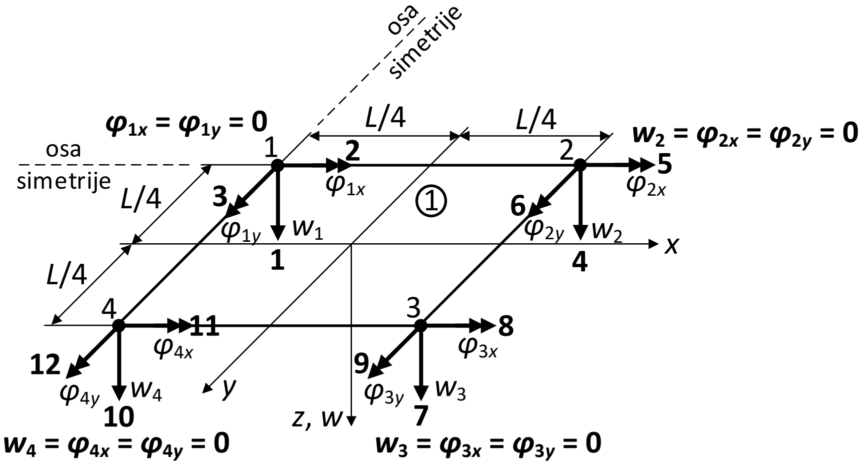
Uklještena kvadratna ploča

- **Varijanta A**



Pravougaoni KE sa 12 SS. Klasična teorija ploča. Primer

- **Varijanta A**



$$\mathbf{K}_{aa}^{*}\mathbf{d}_{a}^{*} = \mathbf{S}_{a}^{*} = \mathbf{P}_{a}^{*} + \mathbf{Q}_{a}^{*}$$

$$\boldsymbol{k}_{1,1}^{(1)*}\boldsymbol{w}_{1}^{*} = \boldsymbol{Q}_{1}^{(1)*}$$

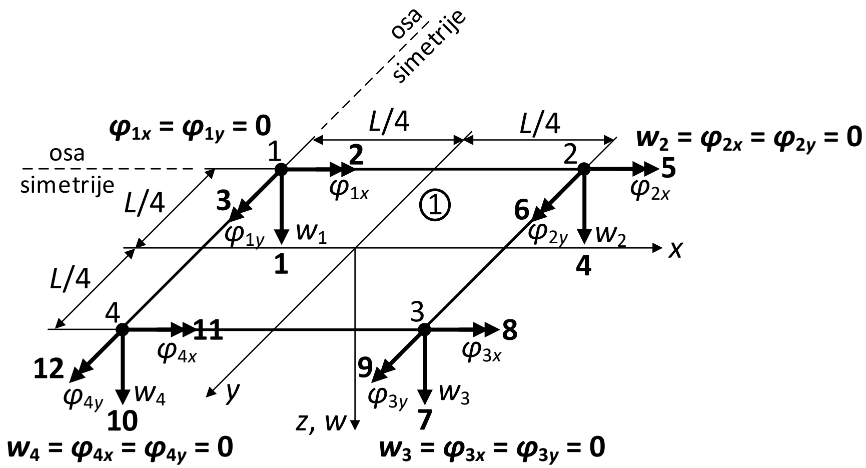
$$\mathbf{k}^{(1)} = \frac{K}{L^2}\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & 11 & 12 \end{matrix} \\ \left[\begin{matrix} 42{,}24 & 1{,}88 & \cdots & 4{,}28 & -1{,}12 \\ & 1{,}52 & \cdots & 0{,}62 & 0 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \text{sim.} & & 1{,}52 & 0{,}30 \\ & & & & 1{,}52 \end{matrix}\right]_{12x12} \end{array}\begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Svojstvene vrednosti matrice krutosti

$$\frac{K}{L^2}\{74{,}1 \quad 51{,}0 \quad 51{,}0 \quad 1{,}3 \quad 1{,}0 \quad 0{,}8 \quad 0{,}8 \quad 0{,}7 \quad 0{,}5 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}$$

Pravougaoni KE sa 12 SS. Klasična teorija ploča. Primer

- **Varijanta A**



$$k_{1,1}^{(1)*} = k_{1,1}^{(1)} = 42{,}24\frac{K}{L^2}$$

$$Q_1^{(1)*} = Q_1^{(1)} = \frac{qL^2}{16}$$

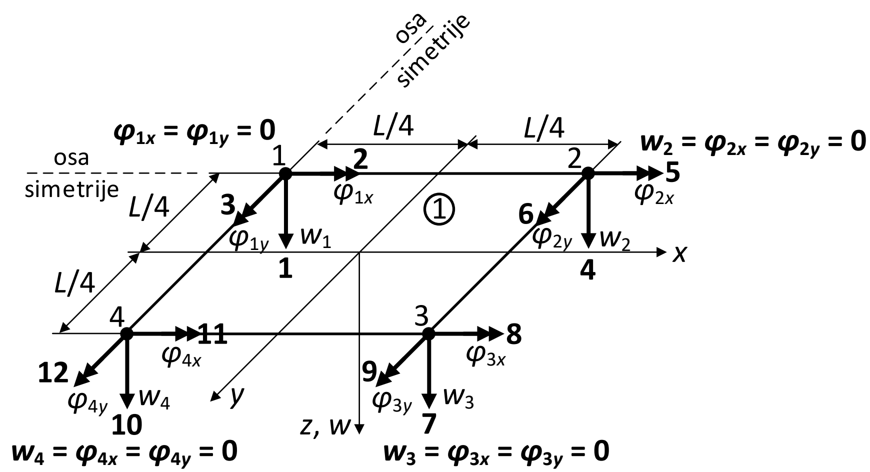
$$w_1^* = w_1 = 0{,}00147964\frac{qL^4}{K} = 0{,}7694 \text{ mm} \qquad w_{1,\,\text{tačno}} = 0{,}00126\frac{qL^4}{K} = 0{,}6552 \text{ mm}$$

$$\mathbf{d}^{(1)*} = \mathbf{d}^{(1)} = \frac{qL^4}{K}\{0{,}00147964 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{DBd}^{(1)} = \mathbf{Sd}^{(1)}$$

Pravougaoni KE sa 12 SS. Klasična teorija ploča. Primer

- **Varijanta A**



Momenti savijanja $M_{x,1}$ i $M_{y,1}$ u čvoru 1 (sredina raspona ploče) iznose

$$\begin{Bmatrix} M_{x,1} \\ M_{y,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}0462 \\ 0{,}0462 \end{Bmatrix} qL^2 = \begin{Bmatrix} 0{,}462 \\ 0{,}462 \end{Bmatrix} \ \mathrm{kNm/m}$$

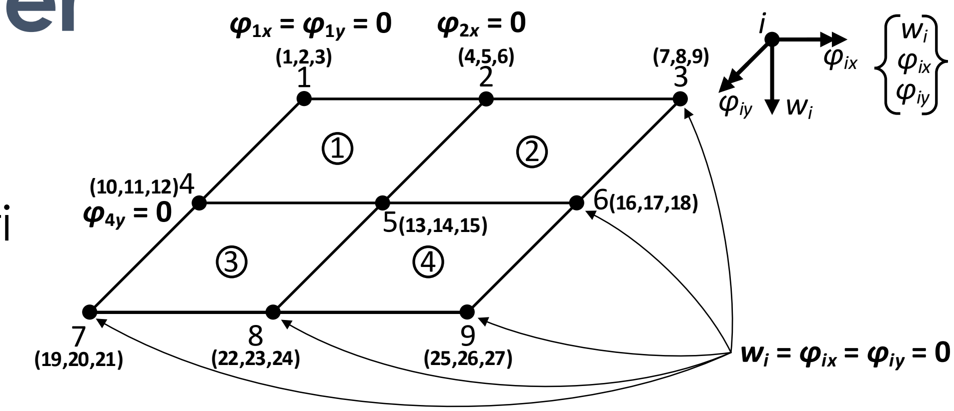
$$M_{x,1,\text{tačno}} = M_{y,1,\text{tačno}} = 0{,}0231 qL^2 = 0{,}231 \ \mathrm{kNm/m}$$

Moment savijanja $M_{x,2}$ u čvoru 2 (sredina uklještene ivice; x = $L/4$), iznosi

$$M_{x,2} = -0{,}0355 qL^2 = -0{,}355 \ \mathrm{kNm/m}$$

$$M_{x,2,\text{tačno}} = M_{y,4,\text{tačno}} = -0{,}0513 qL^2 = -0{,}513 \ \mathrm{kNm/m}$$

Pravougaoni KE sa 12 SS. Klasična teorija ploča. Primer



- **Varijanta B**
  - Sa ciljem povećanja tačnosti rešenja četvrtina ploče je diskretizovana sa 4 KE oblika kvadrata

Redosled brojeva čvorova, vodeći računa da se koristi pravougaoni element koji ima 12 stepeni slobode, glasi:

- konačni element 1: 1, 2, 5 i 4,
- konačni element 2: 2, 3, 6 i 5,
- konačni element 3: 4, 5, 8 i 7, i
- konačni element 4: 5, 6, 9 i 8.

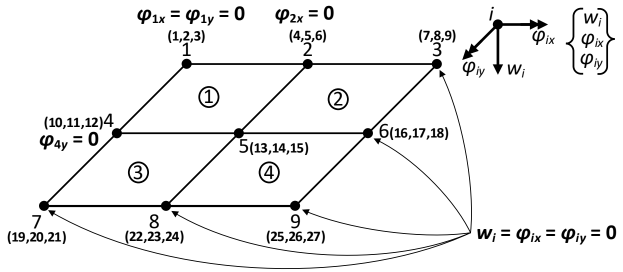
Redosled brojeva stepeni slobode (w_i, φ_{ix}, i φ_{iy}) glasi:

- konačni element 1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 13, 14, 15, 10, 11 i 12,
- konačni element 2: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16, 17, 18, 13, 14 i 15,
- konačni element 3: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 22, 23, 24, 19, 20 i 21, i
- konačni element 4: 13, 14, 15, 16, 17, 18, 25, 26, 27, 22, 23 i 24.

Brojevi aktivnih stepeni slobode (nepoznata generalisana pomeranja): 1, 4, 6, 10, 11, 13, 14 i 15

Pravougaoni KE sa 12 SS. Klasična teorija ploča. Primer

- **Varijanta B**



$$\mathbf{k}^1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 3{,}2492 & 0{,}1877 & \cdots & 0{,}1646 & -0{,}0431 \\ & 0{,}0292 & \cdots & 0{,}0119 & 0 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \text{sim.} & & 0{,}0292 & 0{,}0058 \\ & & & & 0{,}0292 \end{bmatrix}_{12x12} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 11 \\ 12 \end{array} \cdot 10^3$$

$$\mathbf{k}^2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 4 & 5 & \cdots & 14 & 15 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 3{,}2492 & 0{,}1877 & \cdots & 0{,}1646 & -0{,}0431 \\ & 0{,}0292 & \cdots & 0{,}0119 & 0 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \text{sim.} & & 0{,}0292 & 0{,}0058 \\ & & & & 0{,}0292 \end{bmatrix}_{12x12} \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ \vdots \\ 14 \\ 15 \end{array} \cdot 10^3$$

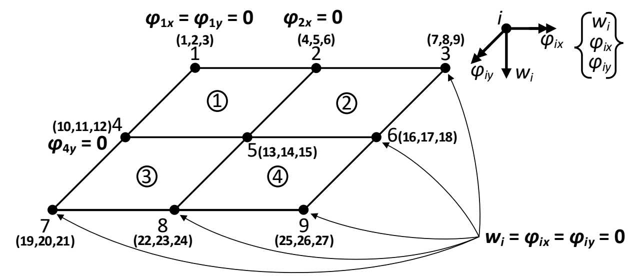
$$\mathbf{k}^3 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 10 & 11 & \cdots & 20 & 21 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 3{,}2492 & 0{,}1877 & \cdots & 0{,}1646 & -0{,}0431 \\ & 0{,}0292 & \cdots & 0{,}0119 & 0 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \text{sim.} & & 0{,}0292 & 0{,}0058 \\ & & & & 0{,}0292 \end{bmatrix}_{12x12} \end{array} \begin{array}{c} 10 \\ 11 \\ \vdots \\ 20 \\ 21 \end{array} \cdot 10^3$$

$$\mathbf{k}^4 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 13 & 14 & \cdots & 23 & 24 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 3{,}2492 & 0{,}1877 & \cdots & 0{,}1646 & -0{,}0431 \\ & 0{,}0292 & \cdots & 0{,}0119 & 0 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \text{sim.} & & 0{,}0292 & 0{,}0058 \\ & & & & 0{,}0292 \end{bmatrix}_{12x12} \end{array} \begin{array}{c} 13 \\ 14 \\ \vdots \\ 23 \\ 24 \end{array} \cdot 10^3$$

$$\mathbf{K}_{aa} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 4 & \cdots & 14 & 15 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 3{,}2492 & -1{,}4031 & \cdots & 0{,}0662 & -0{,}0662 \\ & 6{,}4985 & \cdots & 0{,}3292 & 0 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \text{sim.} & & 0{,}1169 & 0 \\ & & & & 0{,}1169 \end{bmatrix}_{8x8} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ \vdots \\ 14 \\ 15 \end{array} \cdot 10^3$$

Pravougaoni KE sa 12 SS. Klasična teorija ploča. Primer

- **Varijanta B**



$$\mathbf{Q}^1 = \left\{\begin{array}{c} 0{,}1563 \\ 0{,}0065 \\ \vdots \\ -0{,}0065 \\ -0{,}0065 \end{array}\right\}\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 11 \\ 12 \end{array} \qquad \mathbf{Q}^2 = \left\{\begin{array}{c} 0{,}1563 \\ 0{,}0065 \\ \vdots \\ -0{,}0065 \\ -0{,}0065 \end{array}\right\}\begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ \vdots \\ 14 \\ 15 \end{array}$$

$$\mathbf{Q}^3 = \left\{\begin{array}{c} 0{,}1563 \\ 0{,}0065 \\ \vdots \\ -0{,}0065 \\ -0{,}0065 \end{array}\right\}\begin{array}{c} 10 \\ 11 \\ \vdots \\ 20 \\ 21 \end{array} \qquad \mathbf{Q}^4 = \left\{\begin{array}{c} 0{,}1563 \\ 0{,}0065 \\ \vdots \\ -0{,}0065 \\ -0{,}0065 \end{array}\right\}\begin{array}{c} 13 \\ 14 \\ \vdots \\ 23 \\ 24 \end{array}$$

$$\mathbf{Q}_a = \mathbf{S}_a = \left\{\begin{array}{c} 0{,}1563 \\ 0{,}3125 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}_{8\mathrm{x}1}\begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ \vdots \\ 14 \\ 15 \end{array}$$

$$\mathbf{d}_a = \mathbf{K}_{aa}^{-1}\mathbf{S}_a = \left\{\begin{array}{c} 0{,}7297 \\ 0{,}4359 \\ 2{,}1366 \\ 0{,}4359 \\ -2{,}1366 \\ 0{,}2612 \\ -1{,}3030 \\ 1{,}3030 \end{array}\right\}\begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 10 \\ 11 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \end{array} \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}$$

$$w_1 = 0{,}7297\ \mathrm{mm}$$

$$w_{1,\,\text{tačno}} = 0{,}6552\ \mathrm{mm}$$

Komentari:

- Rešenja za ugib konvergiraju ka *tačnoj* vednosti sa tzv. gornje strane (u opštem slučaju (metoda pomeranja) rešenja koja su određena sa nekonformnim konačnim elementima mogu da se nađu sa gornje ili donje strane u odnosu na tačno (nemonotona konvergencija))
- Povećanjem broja konačnih elemenata (progušćenje mreže) i/ili primenom složenijih elemenata može da se postigne konvergencija rešenja ka *tačnom*

Mreža cele ploče	2x2 (4 KE)	4x4 (16 KE)	8x8 (64 KE)	16x16 (256 KE)	32x32 (1024 KE)
Ugib sredine raspona x10⁻³ [m]	0,7694	0,7297	0,6781	0,6631	0,6593
Greška u odnosu na tačno rešenje [%]	17,4	11,4	3,5	1,2	0,6

Pravougaoni KE sa 16 SS. Klasična teorija ploča

- Ako se u svakom čvoru pravougaonog KE koji ima 12 stepeni slobode uvede dodatni stepen slobode, tj. mešoviti parcijalni izvod, dobija se **konformni (zadovoljen C^1 kontinuitet)** pravougaoni **KE koji ima 16 stepeni slobode**. Ovaj element uveli su Bogner, Fox i Schmit pa se naziva **BFS element**
- Osnovne nepoznate u čvorovima KE su generalisana pomeranja

$$\mathbf{d}^T = \{\mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2 \quad \mathbf{d}_3 \quad \mathbf{d}_4\} \qquad \mathbf{d}_i^T = \left\{w_i \quad \varphi_{ix} \quad \varphi_{iy} \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_i\right\}, \qquad i = 1,2,3,4$$

- Raspodela pomeranja u polju KE definisana je nepotpunim polinomom četvrtog stepena (bikubna interpolacija)

$$\begin{gathered} w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \\ + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 x y^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} x^2 y^2 + \\ + \alpha_{13} x y^3 + \alpha_{14} x^3 y^2 + \alpha_{15} x^2 y^3 + \alpha_{16} x^3 y^3 \end{gathered}$$

Pravougaoni KE sa 16 SS. Klasična teorija ploča

- Prvi izvodi po koordinati upravno na posmatranu ivicu, koji se menjaju po funkciji trećeg stepena, mogu jednoznačno da se odrede jer su na raspolaganju po dva stepena slobode u čvorovima na krajevima posmatrane ivice
- IF određuju se analognim postupkom kao i kod elementa sa 12 stepeni slobode
- Raspodela pomeranja u polju KE izražena preko prirodnih koordinata glasi

$$w = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi^2 + \alpha_5\xi\eta + \alpha_6\eta^2 +$$
$$+ \alpha_7\xi^3 + \alpha_8\xi^2\eta + \alpha_9\xi\eta^2 + \alpha_{10}\eta^3 + \alpha_{11}\xi^3\eta + \alpha_{12}\xi^2\eta^2 +$$
$$+ \alpha_{13}\xi\eta^3 + \alpha_{14}\xi^3\eta^2 + \alpha_{15}\xi^2\eta^3 + \alpha_{16}\xi^3\eta^3$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} \rightarrow w = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \quad \xi^3 \quad \xi^2\eta$$
$$\xi\eta^2 \quad \eta^3 \quad \xi^3\eta \quad \xi^2\eta^2 \quad \xi\eta^3 \quad \xi^3\eta^2 \quad \xi^2\eta^3 \quad \xi^3\eta^3] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{16} \end{Bmatrix}$$

Pravougaoni KE sa 16 SS. Klasična teorija ploča

- Za određivanje IF potrebno je odrediti parcijalne izvode po koordinatama x i y i mešoviti parcijalni izvod

$$\varphi_x = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{b}\frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{1}{b}(\alpha_3 + \alpha_5\xi + 2\alpha_6\eta + \alpha_8\xi^2 + 2\alpha_9\eta\xi + 3\alpha_{10}\eta^2 + \alpha_{11}\xi^3 + 2\alpha_{12}\eta\xi^2 + 3\alpha_{13}\eta^2\xi + 2\alpha_{14}\eta\xi^3 + 3\alpha_{15}\eta^2\xi^2 + 3\alpha_{16}\eta^2\xi^3)$$

$$\varphi_x = \frac{1}{b}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & \xi & 2\eta & 0 & \xi^2 2\xi\eta & 3\eta^2 & \xi^3 & 2\xi^2\eta & 3\xi\eta^2 & 2\xi^3\eta & 3\xi^2\eta^2 & 3\xi^3\eta^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_{16}\end{Bmatrix}$$

$$\varphi_y = -\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial \xi} = -\frac{1}{a}(\alpha_2 + 2\alpha_4\xi + \alpha_5\eta + 3\alpha_7\xi^2 + 2\alpha_8\eta\xi + \alpha_9\eta^2 + 3\alpha_{11}\eta\xi^2 + 2\alpha_{12}\eta^2\xi + \alpha_{13}\eta^3 + 3\alpha_{14}\eta^2\xi^2 + 2\alpha_{15}\eta^3\xi + 3\alpha_{16}\eta^3\xi^2)$$

$$\varphi_y = -\frac{1}{a}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 2\xi & \eta & 0 & 3\xi^2 & 2\xi\eta\,\eta^2 & 0 & 3\xi^2\eta & 2\alpha_{12}\xi\eta^2 & \eta^3 & 3\xi^2\eta^2 & 2\xi\eta^3 & 3\xi^2\eta^3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_{16}\end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = \frac{1}{ab}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi\partial \eta} = \frac{1}{ab}(\alpha_5 + 2\alpha_8\xi + 2\alpha_9\eta + 3\alpha_{11}\xi^2 + 4\alpha_{12}\eta\xi + 3\alpha_{13}\eta^2 + 6\alpha_{14}\eta\xi^2 + 6\alpha_{15}\eta^2\xi + 9\alpha_{16}\eta^2\xi^2)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = \frac{1}{ab}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\xi 2\eta & 0 & 3\xi^2 & 4\xi\eta & 3\eta^2 & 6\xi^2\eta & 6\xi\eta^2 & 9\xi^2\eta^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_{16}\end{Bmatrix}$$

Pravougaoni KE sa 16 SS. Klasična teorija ploča

- Vektor generalisanih pomeranja čvorova KE može da se prikaže na sledeći način

$$\mathbf{d} = \mathbf{C}\boldsymbol{\alpha}$$

  - odnosno, supstitucijom koordinata čvorova u prirodnom koordinatnom sistemu sledi

$$\mathbf{C} = \frac{1}{ab}\begin{bmatrix} ab & -ab & -ab & ab & \cdots & ab & -ab & -ab & ab \\ 0 & 0 & a & 0 & \cdots & -3a & 2a & 3a & -3a \\ 0 & -b & 0 & 2b & \cdots & b & -3b & -2b & 3b \\ ab & ab & -ab & ab & \cdots & 3 & -6 & -6 & 9 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ab & -ab & ab & ab & \cdots & -ab & -ab & ab & -ab \\ 0 & 0 & a & 0 & \cdots & -3a & -2a & 3a & -3a \\ 0 & -b & 0 & 2b & \cdots & -b & -3b & 2b & -3b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 6 & -6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 4 & 2b & -2a & ab & \cdots & 4 & -2b & -2a & -ab \\ -6 & -3b & 2a & -ab & \cdots & -6 & 3b & 2a & ab \\ -6 & -2b & 3a & -ab & \cdots & 6 & -2b & -3a & -ab \\ 0 & 0 & 2a & -ab & \cdots & 0 & 0 & 2a & ab \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -3 & -3b & a & -ab & \cdots & 3 & -3b & -a & -ab \\ 0 & -b & 0 & -ab & \cdots & 0 & b & 0 & ab \\ 0 & 0 & a & -ab & \cdots & 0 & 0 & -a & -ab \\ 1 & b & -a & -ab & \cdots & -1 & b & a & ab \end{bmatrix}$$

Pravougaoni KE sa 16 SS. Klasična teorija ploča

- **Matrica IF**

$$\mathbf{N} = \mathbf{AC}^{-1} \qquad \mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2 \quad \mathbf{N}_3 \quad \mathbf{N}_4]$$

$$\mathbf{N}_1^T = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} (-1+\eta)^2(2+\eta)(-1+\xi)^2(2+\xi) \\ b(-1+\eta)^2(1+\eta)(-1+\xi)^2(2+\xi) \\ -a(-1+\eta)^2(2+\eta)(-1+\xi)^2(1+\xi) \\ ab(-1+\eta)^2(1+\eta)(-1+\xi)^2(1+\xi) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N}_2^T = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} -(-1+\eta)^2(2+\eta)(-2+\xi)(1+\xi)^2 \\ -b(-1+\eta)^2(1+\eta)(-2+\xi)(1+\xi)^2 \\ -a(-1+\eta)^2(2+\eta)(-1+\xi)(1+\xi)^2 \\ ab(-1+\eta)^2(1+\eta)(-1+\xi)(1+\xi)^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_3^T = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} (-2+\eta)(1+\eta)^2(-2+\xi)(1+\xi)^2 \\ -b(-1+\eta)(1+\eta)^2(-2+\xi)(1+\xi)^2 \\ a(-2+\eta)(1+\eta)^2(-1+\xi)(1+\xi)^2 \\ ab(-1+\eta)(1+\eta)^2(-1+\xi)(1+\xi)^2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N}_4^T = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} -(-2+\eta)(1+\eta)^2(-1+\xi)^2(2+\xi) \\ b(-1+\eta)(1+\eta)^2(-1+\xi)^2(2+\xi) \\ a(-2+\eta)(1+\eta)^2(-1+\xi)^2(1+\xi) \\ ab(-1+\eta)(1+\eta)^2(-1+\xi)^2(1+\xi) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_i^T = \begin{bmatrix} f_i(\xi)f_i(\eta) \\ bf_i(\xi)g_i(\eta) \\ -ag_i(\xi)f_i(\eta) \\ abg_i(\xi)g_i(\eta) \end{bmatrix}, \qquad i = 1,2,3,4$$

$$f_i(\xi) = \frac{1}{4}(2+3\xi_i\xi - \xi_i\xi^3), \qquad g_i(\xi) = \frac{1}{4}(-\xi_i - \xi + \xi_i\xi^2 + \xi^3)$$

$$f_i(\eta) = \frac{1}{4}(2+3\eta_i\eta - \eta_i\eta^3), \qquad g_i(\eta) = \frac{1}{4}(-\eta_i - \eta + \eta_i\eta^2 + \eta^3)$$

Pravougaoni KE sa 16 SS. Klasična teorija ploča

- **Matrica B**

$$
\mathbf{B}=\begin{bmatrix}
-\frac{3(2-3\eta+\eta^3)\xi}{8a^2} & -\frac{3b(-1+\eta)^2(1+\eta)\xi}{8a^2} & \frac{(-1+\eta)^2(2+\eta)(-1+3\xi)}{8a} & -\frac{b(-1+\eta)^2(1+\eta)(-1+3\xi)}{8a} & \frac{3(2-3\eta+\eta^3)\xi}{8a^2} & \frac{3b(-1+\eta)^2(1+\eta)\xi}{8a^2} & \frac{(-1+\eta)^2(2+\eta)(1+3\xi)}{8a} & -\frac{b(-1+\eta)^2(1+\eta)(1+3\xi)}{8a} & -\frac{3(-2+\eta)(1+\eta)^2\xi}{8a^2} & \frac{3b(-1+\eta)(1+\eta)^2\xi}{8a^2} & -\frac{(-2+\eta)(1+\eta)^2(1+3\xi)}{8a} & -\frac{b(-1+\eta)(1+\eta)^2(1+3\xi)}{8a} & \frac{3(-2+\eta)(1+\eta)^2\xi}{8a^2} & -\frac{3b(-1+\eta)(1+\eta)^2\xi}{8a^2} & -\frac{(-2+\eta)(1+\eta)^2(-1+3\xi)}{8a} & -\frac{b(-1+\eta)(1+\eta)^2(-1+3\xi)}{8a} \\
-\frac{3\eta(2-3\xi+\xi^3)}{8b^2} & -\frac{(-1+3\eta)(-1+\xi)^2(2+\xi)}{8b} & \frac{3a\eta(-1+\xi)^2(1+\xi)}{8b^2} & -\frac{a(-1+3\eta)(-1+\xi)^2(1+\xi)}{8b} & \frac{3\eta(-2+\xi)(1+\xi)^2}{8b^2} & \frac{(-1+3\eta)(-2+\xi)(1+\xi)^2}{8b} & \frac{3a\eta(-1+\xi)(1+\xi)^2}{8b^2} & -\frac{a(-1+3\eta)(-1+\xi)(1+\xi)^2}{8b} & -\frac{3\eta(-2+\xi)(1+\xi)^2}{8b^2} & \frac{(1+3\eta)(-2+\xi)(1+\xi)^2}{8b} & -\frac{3a\eta(-1+\xi)(1+\xi)^2}{8b^2} & -\frac{a(1+3\eta)(-1+\xi)(1+\xi)^2}{8b} & \frac{3\eta(2-3\xi+\xi^3)}{8b^2} & -\frac{(1+3\eta)(-1+\xi)^2(2+\xi)}{8b} & -\frac{3a\eta(-1+\xi)^2(1+\xi)}{8b^2} & -\frac{a(1+3\eta)(-1+\xi)^2(1+\xi)}{8b} \\
-\frac{9(-1+\eta^2)(-1+\xi^2)}{8ab} & -\frac{3(-1+\eta)(1+3\eta)(-1+\xi^2)}{8a} & \frac{3(-1+\eta^2)(-1+\xi)(1+3\xi)}{8b} & -\frac{1}{8}(-1+\eta)(1+3\eta)(-1+\xi)(1+3\xi) & \frac{9(-1+\eta^2)(-1+\xi^2)}{8ab} & \frac{3(-1+\eta)(1+3\eta)(-1+\xi^2)}{8a} & \frac{3(-1+\eta^2)(1+\xi)(-1+3\xi)}{8b} & -\frac{1}{8}(-1+\eta)(1+3\eta)(1+\xi)(-1+3\xi) & -\frac{9(-1+\eta^2)(-1+\xi^2)}{8ab} & \frac{3(1+\eta)(-1+3\eta)(-1+\xi^2)}{8a} & -\frac{3(-1+\eta^2)(1+\xi)(-1+3\xi)}{8b} & -\frac{1}{8}(1+\eta)(-1+3\eta)(1+\xi)(-1+3\xi) & \frac{9(-1+\eta^2)(-1+\xi^2)}{8ab} & -\frac{3(1+\eta)(-1+3\eta)(-1+\xi^2)}{8a} & -\frac{3(-1+\eta^2)(-1+\xi)(1+3\xi)}{8b} & -\frac{1}{8}(1+\eta)(-1+3\eta)(-1+\xi)(1+3\xi)
\end{bmatrix}
$$

Pravougaoni KE sa 16 SS. Klasična teorija ploča

- **Matrica krutosti**

$$\mathbf{k} = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \mathbf{B}^T(\xi,\eta)\mathbf{D}\mathbf{B}(\xi,\eta)\det\mathbf{J}\,d\xi\,d\eta$$

$$k_{1-1} = \frac{K}{ab}\left[\frac{3}{175}(42 + \frac{65(a^4+b^4)}{a^2b^2}\right]$$

$$k_{1-2} = k_{2-1} = \frac{K}{ab}\left[\frac{1}{175}\left(\frac{195a^2}{b} + \frac{55b^3}{a^2} + 21(b+5b\nu)\right)\right]$$

$$k_{1-3} = k_{3-1} = \frac{K}{ab}\left[-\frac{11a^3}{35b^2} - \frac{39b^2}{35a} - \frac{3}{25}a(1+5\nu)\right]$$

$$k_{1-4} = k_{4-1} = \frac{K}{ab}\left[\frac{11a^3}{35b} + \frac{11b^3}{35a} + \frac{1}{50}a(b+10b\nu)\right]$$

itd. (*Metoda konačnih elemenata, deo II*)

Pravougaoni KE sa 16 SS. Klasična teorija ploča

- **Vektor ekvivalentnog opterećenja Q** određuju se analognim postupkom kao i kod KE sa 12 stepeni slobode
  - U slučaju jednako raspodeljenog opterećenja q_z vektor ekvivalentnog opterećenja glasi

$$\mathbf{Q}^T = q_z ab\left\{1 \quad \frac{b}{3} \quad -\frac{a}{3} \quad \frac{ab}{9} \quad 1 \quad \frac{b}{3} \quad \frac{a}{3} \quad -\frac{ab}{9} \quad 1 \quad -\frac{b}{3} \quad \frac{a}{3} \quad \frac{ab}{9} \quad 1 \quad -\frac{b}{3} \quad -\frac{a}{3} \quad -\frac{ab}{9}\right\}$$

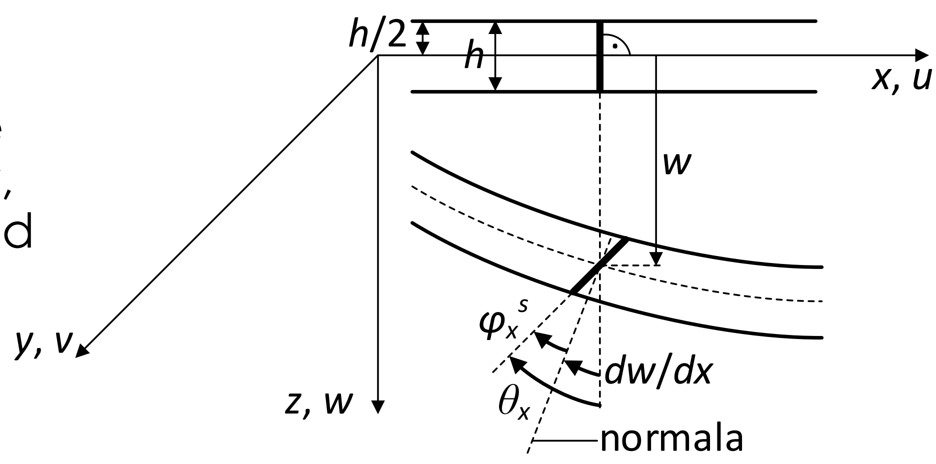
- Primenom konformnih KE, sa povećanjem broja stepeni slobode modela (progušćivanje mreže) tačnom rešenju za pomeranja monotono se prilazi sa *donje strane*. Generalno, konvergencija rešenja određenih primenom konformnih KE bolja je nego kod rešenja određenih nekonformnim KE

Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča

- Uzima se u obzir uticaj transverzalnih sila na deformaciju klizanja
- Polazi se od pretpostavke da su pomeranja (ugibi) i ukupne rotacije normala poprečnih preseka međusobno nezavisne veličine
- C^0 kontinuitet
- Obrtanje vlakna

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x^s \qquad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y^s$$

  - gde su uglovi rotacije normale na srednju ravan $\partial w/\partial x$ i $\partial w/\partial y$, a φ_x^s i φ_y^s rotacije vlakana usled transverzalnih sila



Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča

- Komponente pomeranja u i v proizvoljne tačke unutar ploče glase

$$u = u(x, y, z) = -z\theta_x(x, y) = -z\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x^s\right) \qquad v = v(x, y, z) = -z\theta_y(x, y) = -z\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y^s\right)$$

- Za sve tačke koje se nalaze na normali na srednju površ ($\varepsilon_z = \partial w/\partial z = 0$) pomeranje w glasi

$$w = w(x, y, z) = w(x, y)$$

- Veze između deformacije i pomeranja mogu da se prikažu u matričnom obliku

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z\dfrac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -z\dfrac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -z\left(\dfrac{\partial \theta_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{Bmatrix}$$

Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča

- Definiše se vektor $\boldsymbol{\kappa}$ (deformacije usled savijanja, tj. promene krivina i torzije) i vektor $\boldsymbol{\gamma}$ (deformacije usled smicanja ili klizanja)

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -\left(\dfrac{\partial \theta_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} -\varphi_x^s \\ -\varphi_y^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{Bmatrix}$$

- Sada se može uspostaviti veza

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z\boldsymbol{\kappa} \qquad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\gamma}$$

Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča

- Veza između deformacije i napona glasi

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 & & \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & \mathbf{0} & \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & & \\ & & & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ & \mathbf{0} & & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

- Sile u presecima mogu da se prikažu u sledećem obliku

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{T} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ T_{xz} \\ T_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_b & \\ & \mathbf{D}_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_s = \frac{Eh}{2k(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{Gh}{k} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča

- Potencijalna energija deformacije

$$U = \frac{1}{2}\int_A \left(M_x\kappa_x + M_y\kappa_y + M_{xy}\kappa_{xy} + T_x\varphi_x^s + T_y\varphi_y^s\right)dA$$

$$U = \frac{1}{2}\int_A (\boldsymbol{\kappa}^T\mathbf{D}_b\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\gamma}^T\mathbf{D}_s\boldsymbol{\gamma})dA$$

- Prethodni izraz razlikuje se od izraza u klasičnoj teoriji savijanja ploča za drugi sabirak koji predstavlja udeo transverzalnih sila u potencijalnoj energiji deformacije

Izoparametarski KE. Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča

- Geometrija i raspodela pomeranja opisuju se istim IF

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{k} \begin{bmatrix} N_i & \\ & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{k} \begin{bmatrix} N_i & & \\ & N_i & \\ & & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{ix} \\ \theta_{iy} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{N}_i \mathbf{d}_i$$

  - gde je *k* ukupan broj čvorova konačnog elementa, $\mathbf{N}_i$ je matrica interpolacionih funkcija *i*-tog čvora i $\mathbf{d}_i$ je vektor generalisanih pomeranja *i*-tog čvora
- Matrica krutosti

$$\mathbf{k} = \int_A \left(\mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b + \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s \right) dA$$

$$\mathbf{k}_{i,j} = \int_A \left(\mathbf{B}_{bi}^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_{bj} + \mathbf{B}_{si}^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_{sj} \right) dA, \qquad i,j = 1,2,3,\ldots,k$$

  - gde prvi deo predstavlja krutost na savijanje, a drugi krutost na smicanje

Izoparametarski KE. Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča

- Veza između vektora promene krivina i torzije u proizvoljnoj tački KE i vektora generalisanih pomeranja u čvorovima glasi

$$\boldsymbol{\kappa} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{B}_{bi}\mathbf{d}_i \qquad \boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -\left(\dfrac{\partial \theta_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{B}_{bi} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & -\dfrac{\partial N_i}{\partial y} & -\dfrac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}, \qquad i = 1,2,3,\ldots,k$$

- Veza između vektora deformacije klizanja u proizvoljnoj tački KE i vektora generalisanih pomeranja u čvorovima glasi

$$\boldsymbol{\gamma} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{B}_{si}\mathbf{d}_i \qquad \boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} -\varphi_x^s \\ -\varphi_y^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{B}_{si} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -N_i \end{bmatrix}, \qquad i = 1,2,3,\ldots,k$$

Izoparametarski KE. Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča

- Matrice $\mathbf{B}_b$ i $\mathbf{B}_s$ za konačni element mogu da se prikažu na sledeći način

$$\mathbf{B}_b = [\mathbf{B}_{b1} \quad \mathbf{B}_{b2} \quad \cdots \quad \mathbf{B}_{bk}]$$

$$\mathbf{B}_s = [\mathbf{B}_{s1} \quad \mathbf{B}_{s2} \quad \cdots \quad \mathbf{B}_{sk}]$$

- Matrica interpolacionih funkcija za KE

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{N}_k]$$

- Vektor generalisanih pomeranja za KE

$$\mathbf{d} = \{\mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{d}_k\}^T$$

- S obzirom na to da su interpolacione funkcije N_i zavisne od prirodnih koordinata ξ i η sledi da je

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Izoparametarski KE. Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča

- Matrica krutosti (elementi mogu da se odrede numeričkom integracijom)

$$\mathbf{k}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathbf{B}_b^T\mathbf{D}_b\mathbf{B}_b\det\mathbf{J}\,d\xi d\eta+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathbf{B}_s^T\mathbf{D}_s\mathbf{B}_s\det\mathbf{J}\,d\xi d\eta$$

- Vektor ekvivalentnog opterećenja *i*-tog čvora

$$\mathbf{Q}_i=\left\{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathbf{N}_i\mathbf{q}_z\det\mathbf{J}\,d\xi d\eta \quad 0 \quad 0\right\}^T, \qquad i=1,2,3,\ldots,k$$

- Vektor ekvivalentnog opterećenja (elementi mogu da se odrede numeričkom integracijom)

$$\mathbf{Q}=\{\mathbf{Q}_1 \quad \mathbf{Q}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{Q}_k\}^T$$

- IF izvedene za izoparametarske KE mogu da se koriste i u ovom slučaju (npr. za četvorougaoni KE)

Izoparametarski KE. Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča

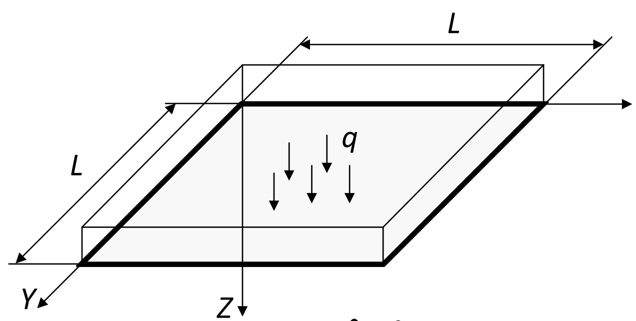
- Prikazani KE osetljiv je na tzv. ***shear-locking* efekat** koji je izražen kod elemenata sa nižim stepenom interpolacije. Kod tankih ploča pri tačnoj integraciji matrice krutosti dobijaju se previše kruti KE zbog prevelikog učešća deformacije smicanja u ukupnoj energiji deformacije, što je posledica međusobne nezavisnosti polja pomeranja i polja obrtanja
- Jedan od najjednostavnijih načina za rešavanje prethodnog problema je **selektivna integracija** kod koje se tačna numerička integracija primenjuje na deo koji potiče od savijanja, a niži red numeričke integracije na deo matrice krutosti koji potiče od klizanja. Takođe, vrlo jednostavan način eleminacije shear-locking efekta je **redukovana integracija** kod koje se primenjuje niži red numeričke integracije na deo matrice krutosti za savijanje i smicanje. Odgovarajućim izborom reda integracije mogu da se dobiju rešenja zadovoljavajuće tačnosti

Izoparametarski KE. Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča

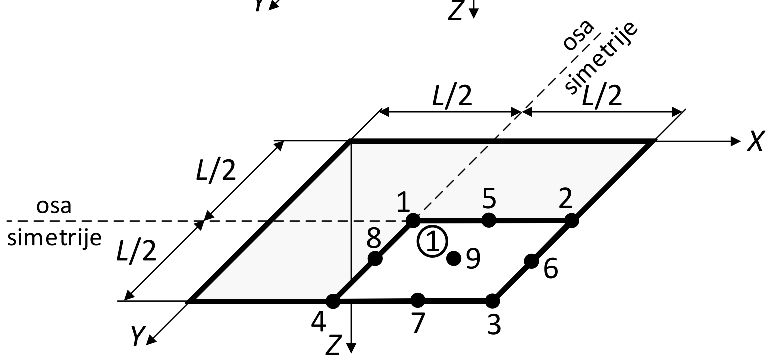
- **Primenom selektivne i redukovane integracije može da se dobije veći broj nultih svojstvenih vrednosti** (nultih energetskih oblika) od broja stepeni slobode KE kao krutog tela (test svojstvenih vrednosti). Elementi sa suvišnim nultim energetskim oblicima mogu da dovedu do nerealnih rešenja
- **Pored testa svojstvenih vrednosti KE i grupa KE treba da zadovolje i tzv. *patch* testove** (pri određenim uslovima mora da se obezbedi stanje konstantne deformacije u KE i sistemu KE). Pri patch testovima može da se bira takvo polje pomeranja koje odgovara traženom stanju konstantne deformacije (zadaju se odgovarajuća generalisana pomeranja u čvorovima na konturi), a test je ispunjen ako su sračunata pomeranja u poljima KE jednaka pretpostavljenom polju pomeranja. Umesto ovakvog pristupa za obezbeđivanje stanja konstantne deformacije može da se aplicira odgovarajuće opterećenje i uslovi oslanjanja. Test je ispunjen ako se u poljima KE dobije odgovarajuće stanje konstantne deformacije

Izoparametarski KE. Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča. Primer 1

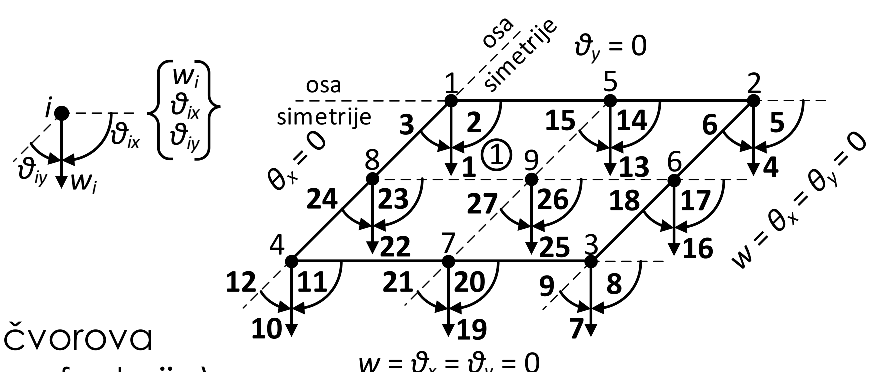
- **Kvadratna ploča**
- Podaci su: jednako raspodeljeno opterećenje q_z = 10 kN/m^2, modul elastičnosti E = 210·10^6 kPa, Poasonov koeficijent ν = 0,3, raspon L = 1,0 m i debljina h = 0,01 m



Uklještena kvadratna ploča



Lagranžov KE koji ima 9 čvorova (kvadratne interpolacione funkcije)



Izoparametarski KE. Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča. Primer 1

- **Kvadratna ploča**
- Matrica krutosti KE određuje se numeričkom integracijom
- Da bi se eliminisao shear-locking efekat primenjuje se selektivna integracija (za deo matrice krutosti na savijanje red numeričke integracije je 3x3, a za deo matrice krutosti na smicanje 2x2)
- Pri određivanju matrice krutosti za savijanje tačke integracije obeležene su brojevima 1, 2, 3, ... i 9, i istovremeno su jednake prirodnim koordinatama

$$\xi_1=-\sqrt{0,6},\quad \eta_1=-\sqrt{0,6},\quad w_1=\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9}$$

$$\xi_2=0,\quad \eta_2=-\sqrt{0,6},\quad w_2=\frac{8}{9}\cdot\frac{5}{9}$$

$$\xi_3=\sqrt{0,6},\quad \eta_3=-\sqrt{0,6},\quad w_3=\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9}$$

$$\xi_4=-\sqrt{0,6},\quad \eta_4=0,\quad w_4=\frac{5}{9}\cdot\frac{8}{9}$$

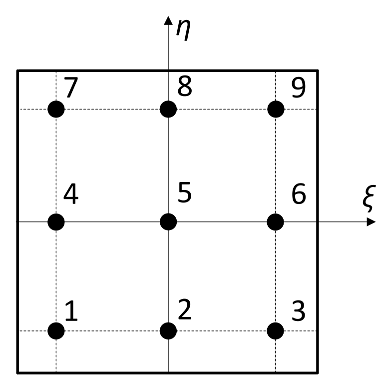
$$\xi_5=0,\quad \eta_5=0,\quad w_5=\frac{8}{9}\cdot\frac{8}{9}$$

$$\xi_6=\sqrt{0,6},\quad \eta_6=0,\quad w_6=\frac{5}{9}\cdot\frac{8}{9}$$

$$\xi_7=-\sqrt{0,6},\quad \eta_7=\sqrt{0,6},\quad w_7=\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9}$$

$$\xi_8=0,\quad \eta_8=\sqrt{0,6},\quad w_8=\frac{8}{9}\cdot\frac{5}{9}$$

$$\xi_9=\sqrt{0,6},\quad \eta_9=\sqrt{0,6},\quad w_9=\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9}$$



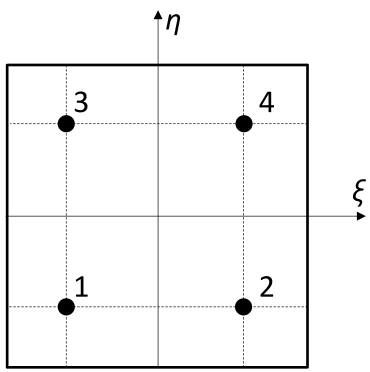
Izoparametarski KE. Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča. Primer 1

- **Kvadratna ploča**
- Pri određivanju matrice krutosti za smicanje tačke integracije obeležene su brojevima 1, 2, 3 i 4, i istovremeno su jednake prirodnim koordinatama

$$\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \eta_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad \eta_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\xi_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \eta_3 = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad \xi_4 = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad \eta_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$w_1 = 1\cdot 1,\quad w_2 = 1\cdot 1,\quad w_3 = 1\cdot 1,\quad w_4 = 1\cdot 1$$



- Matrica krutosti za savijanje

$$\mathbf{D}_b = \begin{bmatrix} 0,019231 & 0,005769 & 0 \\ 0,005769 & 0,019231 & 0 \\ 0 & 0 & 0,006731 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

Izoparametarski KE. Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča. Primer 1

- **Kvadratna ploča**
- Matrica krutosti za savijanje
- Tačka integracije 1

$$J_{11,b,1}(\xi_1,\eta_1)=0{,}25,\quad J_{12,b,1}(\xi_1,\eta_1)=0$$
$$J_{21,b,1}(\xi_1,\eta_1)=0,\quad J_{22,b,1}(\xi_1,\eta_1)=0{,}25$$

$$\det\mathbf{J}_{b,1}(\xi_1,\eta_1)=0{,}0625$$

$$\mathbf{J}_{b,1}^{-1}(\xi_1,\eta_1)=\begin{bmatrix}4{,}0 & 0\\ 0 & 4{,}0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{b,1}=\begin{bmatrix}0 & 3{,}5041 & 0 & \cdots & -2{,}4787 & 0\\ 0 & 0 & 3{,}5041 & \cdots & 0 & -2{,}4787\\ 0 & 3{,}5041 & 3{,}5041 & \cdots & -2{,}4787 & -2{,}4787\end{bmatrix}_{3x27}$$

$$\mathbf{k}_{b,1}=\mathbf{B}_{b,1}^{T}\mathbf{D}_b\mathbf{B}_{b,1}\det\mathbf{J}_{b,1}w_{b,1}$$

$$\mathbf{k}_{b,1}=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc|c}1 & 2 & \cdots & 26 & 27 & \\ \hline\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccc}0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ & 0{,}000615 & \cdots & -0{,}000435 & -0{,}000209\\ & & \ddots & \vdots & \vdots\\ & \text{sim.} & & 0{,}000308 & 0{,}000148\\ & & & & 0{,}000308\end{array}\right]_{27x27}\end{array}\begin{array}{c}\\1\\2\\\vdots\\26\\27\end{array}\cdot 10^4$$

Izoparametarski KE. Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča. Primer 1

- **Kvadratna ploča**
- Matrica krutosti za savijanje
- Analognim postupkom određuju se u <u>tačkama integracije 2, 3, 4, ... i 9</u> matrice krutosti $\mathbf{k}_{b,2}$, $\mathbf{k}_{b,3}$, $\mathbf{k}_{b,4}$, ... i $\mathbf{k}_{b,9}$, respektivno, nakon čega se njihovim sabiranjem određuje numeričko rešenje dela matrice krutosti na savijanje $\mathbf{k}_{b,N}$

$$\mathbf{k}_{b,N} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \cdots & 26 & 27 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & 0,000808 & \cdots & -0,000462 & -0,000556 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \text{sim.} & & 0,007385 & 0 \\ & & & & 0,007385 \end{array}\right]_{27x27} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 26 \\ 27 \end{array} \cdot 10^4$$

Izoparametarski KE. Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča. Primer 1

- **Kvadratna ploča**
- Matrica krutosti za smicanje

$$\mathbf{D}_s = \begin{bmatrix} 673{,}077 & 0 \\ 0 & 673{,}077 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

- Tačka integracije 1

$$J_{11,s,1}(\xi_1,\eta_1) = 0{,}25, \quad J_{12,s,1}(\xi_1,\eta_1) = 0$$
$$J_{21,s,1}(\xi_1,\eta_1) = 0, \quad J_{22,s,1}(\xi_1,\eta_1) = 0{,}25$$

$$\det \mathbf{J}_{s,1}(\xi_1,\eta_1) = 0{,}0625 \qquad \mathbf{J}^{-1}_{s,1}(\xi_1,\eta_1) = \begin{bmatrix} 4{,}0 & 0 \\ 0 & 4{,}0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{s,1} = \begin{bmatrix} -1{,}9623 & -0{,}2073 & 0 & \cdots & -0{,}4444 & 0 \\ -1{,}9623 & 0 & -0{,}2073 & \cdots & 0 & -0{,}4444 \end{bmatrix}_{2x27} \qquad \mathbf{k}_{s,1} = \mathbf{B}^T_{s,1} \mathbf{D}_s \mathbf{B}_{s,1} \det \mathbf{J}_{s,1} w_{s,1}$$

$$\mathbf{k}_{s,1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \cdots & 26 & 27 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 32{,}3954 & 1{,}7115 & \cdots & 3{,}6687 & 3{,}6687 & 1 \\ & 0{,}1808 & \cdots & 0{,}3876 & 0 & 2 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & \text{sim.} & & 0{,}8310 & 0 & 26 \\ & & & & 0{,}8310 & 27 \end{array}\right]_{27x27} \end{array} \cdot 10^4$$

Izoparametarski KE. Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča. Primer 1

- **Kvadratna ploča**
- Matrica krutosti za smicanje
- Analognim postupkom određuju se u <u>tačkama integracije 2, 3, i 4</u> matrice krutosti $\mathbf{k}_{s,2}$, $\mathbf{k}_{s,3}$, i $\mathbf{k}_{s,4}$ respektivno, nakon čega se njihovim sabiranjem određuje numeričko rešenje dela matrice krutosti na smicanje $\mathbf{k}_{s,N}$

$$\mathbf{k}_{s,N} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \cdots & 26 & 27 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccc} 34,9003 & 1,8697 & \cdots & 2,4929 & 2,4929 \\ & 0,2077 & \cdots & 0,2077 & 0 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \text{sim.} & & 3,3238 & 0 \\ & & & & 3,3238 \end{array}\right]_{27x27} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 26 \\ 27 \end{array} \end{array} \cdot 10^4$$

Izoparametarski KE. Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča. Primer 1

- **Kvadratna ploča**
- Matrica krutosti konačnog elementa k_N određuje se sabiranjem matrica krutosti na savijanje i smicanje

$$\mathbf{k}_N=\mathbf{k}_{b,N}+\mathbf{k}_{s,N}=\begin{array}{cc} \begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & 26 & 27\end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 34,9003 & 1,8697 & \cdots & 2,4929 & 2,4929 \\ & 0,2085 & \cdots & 0,2073 & -0,000556 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \text{sim.} & & 3,3312 & 0 \\ & & & & 3,3312 \end{bmatrix}_{27\text{x}27} & \begin{matrix}1\\2\\\vdots\\26\\27\end{matrix} \end{array} \cdot 10^4$$

Komentar:
Matrica krutosti $\mathbf{k}_N$ je pozitivno semidefinitna i ima 4 svojstvene vrednosti jednake nuli, tj. ima 1 suvišni nulti energetski oblik. Ovaj element u kombinaciji sa selektivnom integracijom ima dobro ponašanje u smislu konvergencije rešenja i eliminacije *shear-locking* efekta ali se pri analizi savijanja ploča mora sa oprezom primenjivati jer elementi sa suvišnim nultim energetskim oblicima mogu da dovedu do nerealnih rešenja pri određenim graničnim uslovima (npr. kvadratna ploča opterećena koncentrisanom silom u jednom uglu sa minimalnim brojem oslonaca koji sprečavaju pomeranja kao krutog tela). Kod Lagranžovog elementa koji ima 9 čvorova sa zamenjujućim poljem deformacije klizanja izbegava se pojava suvišnog nultog energetskog oblika i grupa elemenata prolazi *patch* testove (Teorija savijanja ploča – numeričke metode i računarski programi, Vuksanović Đ., Pujević B., IP „Nauka" – Beograd, 1994.)

Izoparametarski KE. Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča. Primer 1

- **Kvadratna ploča**
- Vektor ekvivalentnog opterećenja

$$\mathbf{Q}_1 = \left\{\begin{array}{c} 0{,}0694 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0{,}2778 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1{,}1111 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}_{27x1} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ \vdots \\ 25 \\ 26 \\ 27 \end{array}$$

- Elementi vektora ekvivalentnog optrećenja Q_1 mogu da se odrede numeričkom integracijom (red 2 x 2)
- U čvoru 1

$$\mathbf{N}_1(\xi_1,\eta_1)\mathbf{q}_z(\xi_1,\eta_1)\det\mathbf{J}(\xi_1,\eta_1)w_1 = 0{,}129585$$

$$\mathbf{N}_1(\xi_2,\eta_2)\mathbf{q}_z(\xi_2,\eta_2)\det\mathbf{J}(\xi_2,\eta_2)w_2 = -0{,}0347222$$

$$\mathbf{N}_1(\xi_3,\eta_3)\mathbf{q}_z(\xi_3,\eta_3)\det\mathbf{J}(\xi_3,\eta_3)w_3 = -0{,}0347222$$

$$\mathbf{N}_1(\xi_4,\eta_4)\mathbf{q}_z(\xi_4,\eta_4)\det\mathbf{J}(\xi_4,\eta_4)w_4 = 0{,}00930379$$

Izoparametarski KE. Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča. Primer 1

- **Kvadratna ploča**
- Vektor ekvivalentnog opterećenja
- Sabiranjem prethodne četiri veličine određuje se vrednost u čvoru 1, odnosno vektor ekvivalentnog opterećenja $\mathbf{Q}_1^1$ za čvor 1 glasi

$$\mathbf{Q}_1^1 = \left\{ \begin{array}{c|c} 0{,}0694 & 1 \\ \hdashline 0 & 2 \\ \hdashline 0 & 3 \end{array} \right\}$$

- Analognim postupkom određuju se elementi vektora ekvivalentnog opterećenja za ostale čvorove
- Rešenja za vektor ekvivalentnog opterećenja određena analitičkom i numeričkom integracijom međusobno su jednaka

Izoparametarski KE. Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča. Primer 1

- **Kvadratna ploča**

$$\mathbf{K}_{aa} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} 1 & 13 & \cdots & 26 & 27 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccc} 34{,}9003 & -2{,}4929 & \cdots & 2{,}4929 & 2{,}4929 \\ & 109{,}687 & \cdots & 0 & 9{,}9715 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \text{sim.} & & 3{,}3312 & 0 \\ & & & & 3{,}3312 \end{array}\right]_{8x8} & \begin{array}{c} 1 \\ 13 \\ \vdots \\ 26 \\ 27 \end{array} \end{array} \cdot 10^{4}$$

$$\mathbf{Q}_{a} = \mathbf{S}_{a} = \begin{array}{cc} \left\{\begin{array}{c} 0{,}0694 \\ 0{,}2778 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}_{8x1} & \begin{array}{c} 1 \\ 13 \\ \vdots \\ 26 \\ 27 \end{array} \end{array}$$

$$\mathbf{d}_{a} = \mathbf{K}_{aa}^{-1}\mathbf{S}_{a} = \begin{array}{cc} \left\{\begin{array}{c} 0{,}8024 \\ 0{,}4018 \\ -2{,}4004 \\ 0{,}4018 \\ -2{,}4004 \\ 0{,}2011 \\ -1{,}2045 \\ -1{,}2045 \end{array}\right\} & \begin{array}{c} 1 \\ 13 \\ 14 \\ 22 \\ 24 \\ 25 \\ 26 \\ 27 \end{array} \end{array} \cdot 10^{-3}$$

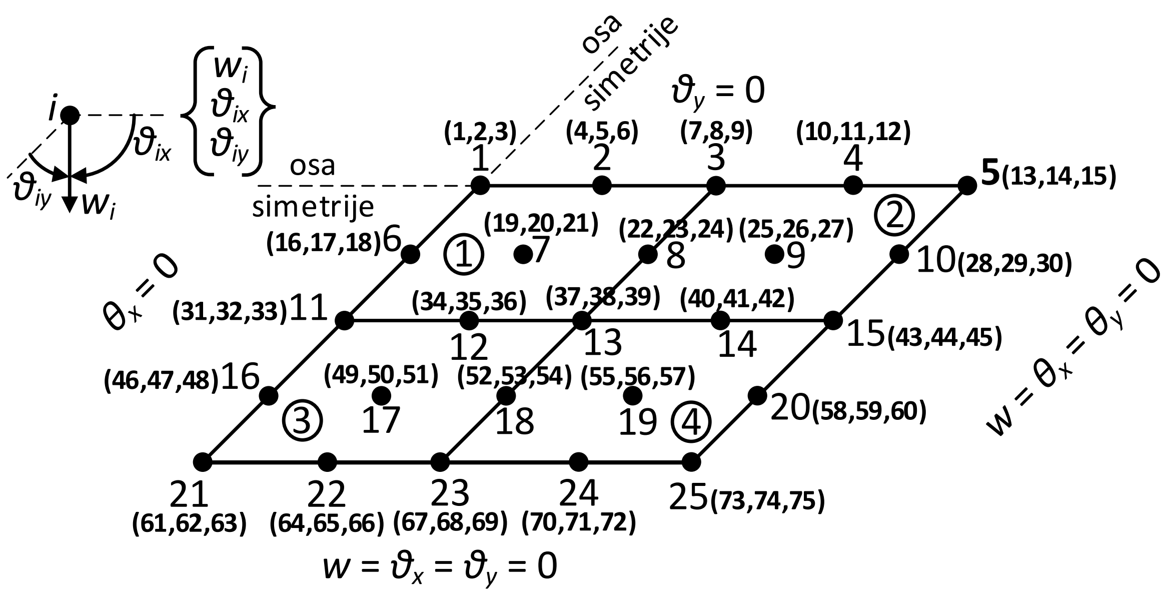
$$w_1 = 0{,}8024 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}$$

$$w_{1,\text{tačno}} = 0{,}6552 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}$$

S obzirom na odnos debljine i raspona opravdano je usvojiti da se ploča ponaša prema klasičnoj teoriji

Izoparametarski KE. Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča. Primer 1

- **Kvadratna ploča**
- Sa ciljem povećanja tačnosti rešenja za ugib četvrtina ploče je diskretizovana sa 4 KE oblika kvadrata čija je dužina stranice jednaka četvrtini raspona ploče

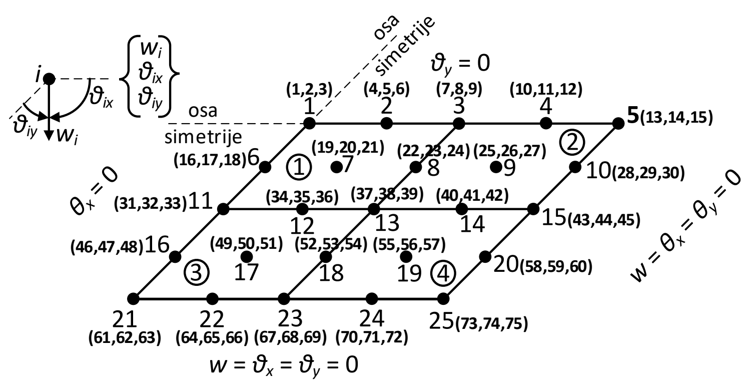


Izoparametarski KE. Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča. Primer 1

Kvadratna ploča

Redosled brojeva čvorova, vodeći računa da se koristi Lagranžov element sa 9 čvorova, glasi:

- konačni element 1: 1, 3, 13, 11, 2, 8, 12, 6 i 7,
- konačni element 2: 3, 5, 15, 13, 4, 10, 14, 8 i 9,
- konačni element 3: 11, 13, 23, 21, 12, 18, 22, 16 i 17, i
- konačni element 4: 13, 15, 25, 23, 14, 20, 24, 18 i 19.



Redosled brojeva stepeni slobode (w_i, ϑ_{ix}, i ϑ_{iy}) glasi:

- konačni element 1: 1, 2, 3, 7, 8, 9, 37, 38, 39, 31, 32, 33, 4, 5, 6, 22, 23, 24, 34, 35, 36, 16, 17, 18, 19, 20 i 21,
- konačni element 2: 7, 8, 9, 13, 14, 15, 43, 44, 45, 37, 38, 39, 10, 11, 12, 28, 29, 30, 40, 41, 42, 22, 23, 24, 25, 26 i 27,
- konačni element 3: 31, 32, 33, 37, 38, 39, 67, 68, 69, 61, 62, 63, 34, 35, 36, 52, 53, 54, 64, 65, 66, 46, 47, 48, 49, 50 i 51, i
- konačni element 4: 37, 38, 39, 43, 44, 45, 73, 74, 75, 67, 68, 69, 40, 41, 42, 58, 59, 60, 70, 71, 72, 52, 53, 54, 55, 56 i 57.

Brojevi aktivnih stepeni slobode su: 1, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56 i 57

Izoparametarski KE. Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča. Primer 1

- **Kvadratna ploča**

$$\mathbf{k}^1=\mathbf{k}^2=\mathbf{k}^3=\mathbf{k}^4=\begin{bmatrix} 34{,}9003 & 0{,}9348 & \cdots & 1{,}2464 & 1{,}2464 \\ & 0{,}0527 & \cdots & 0{,}0515 & -0{,}000556 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \text{sim.} & & 0{,}8383 & 0 \\ & & & & 0{,}8383 \end{bmatrix}\cdot 10^4 \qquad \mathbf{Q}^1=\mathbf{Q}^2=\mathbf{Q}^3=\mathbf{Q}^4=\begin{Bmatrix} 0{,}0174 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0{,}2778 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{aa}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 4 & \cdots & 56 & 57 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 34{,}9003 & -2{,}4929 & \cdots & 0 & 0 \\ & 109{,}687 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \text{sim.} & & 0{,}8383 & 0 \\ & & & & 0{,}8383 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 4 \\ \vdots \\ 56 \\ 57 \end{array} \cdot 10^4$$

$$\mathbf{Q}_a=\mathbf{S}_a=\begin{Bmatrix} 0{,}0174 \\ 0{,}0694 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}\begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ \vdots \\ 56 \\ 57 \end{array} \qquad \mathbf{d}_a=\mathbf{K}_{aa}^{-1}\mathbf{S}_a=\begin{Bmatrix} 0{,}6649 \\ 0{,}5921 \\ \vdots \\ -0{,}4221 \\ -0{,}4221 \end{Bmatrix}\begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ \vdots \\ 56 \\ 57 \end{array}\cdot 10^{-3}$$

$$w_1 = 0{,}6649 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}$$

$$w_{1,\text{tačno}} = 0{,}6552 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}$$

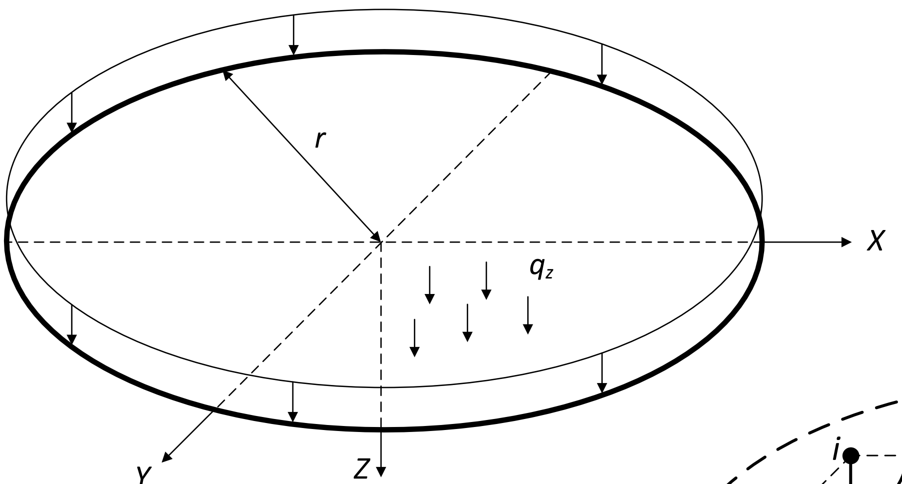
Izoparametarski KE. Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča. Primer 1

- **Kvadratna ploča**
- Ako bi u modelu promenili samo debljinu ploče na vrednost h=0,1m tada bi se za ugib sredine raspona ploče dobile sledeće vrednosti:
  - tačno rešenje klasične teorije
    - $w_{1,a} = 0{,}0006552 \cdot 10^{-3}\mathrm{m}$
  - rešenje određeno primenom MKE (Rajsner-Mindlinova teorija)
    - $w_{1,b} = 0{,}0007885 \cdot 10^{-3}\mathrm{m}$

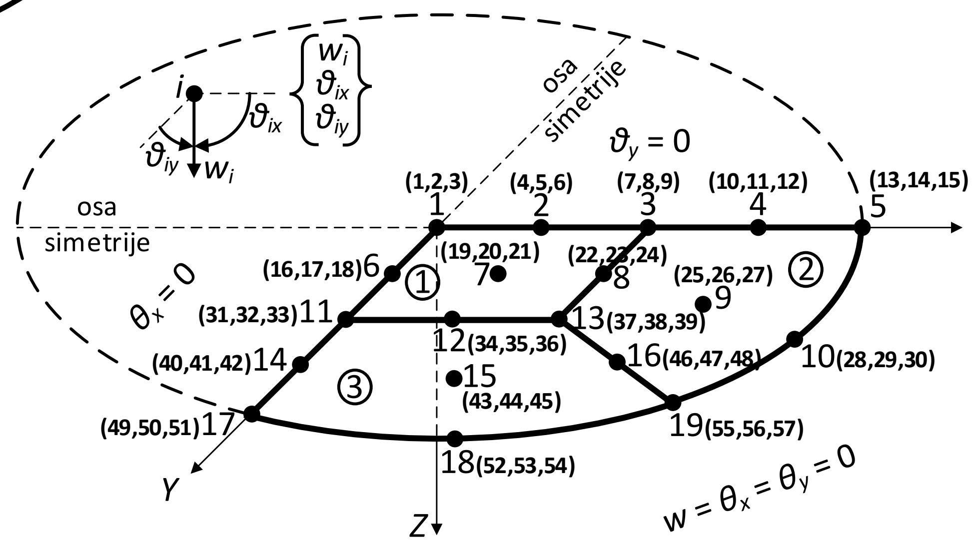
Komenatar:
Razlika između tačnog rešenja prema klasičnoj teoriji i rešenja određenog primenom MKE (Rajsner-Mindlinova teorija) iznosi približno 17% u odnosu na rešenje određeno primenom MKE. Bez obzira na malu grešku rešenja po MKE (rešenje za ugib sredine raspona konvergira ka vrednosti $0{,}0007623 \cdot 10^{-3}$ m) zaključuje se da ponašanje ploče nije u skladu sa klasičnom teorijom. Ovo je posledica zanemarenja uticaja deformacije klizanja u klasičnoj teoriji

Izoparametarski KE. Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča. Primer 2

- **Kružna ploča**

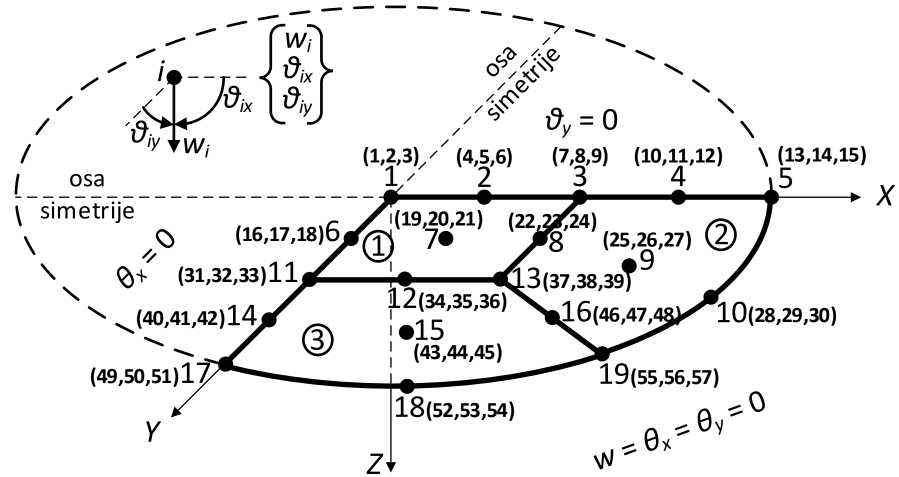


Podaci su: jednako raspodeljeno opterećenje q_z = 10 kN/m^2, modul elastičnosti E = 210 GPa, Poasonov koeficijent ν = 0,3, poluprečnik r = 0,5 m i debljina h = 0,01 m



Izoparametarski KE. Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča. Primer 2

Kružna ploča



Redosled brojeva čvorova, vodeći računa o pravilu za Lagranžov element koji ima 9 čvorova, glasi:

- konačni element 1: 1, 3, 13, 11, 2, 8, 12, 6 i 7,
- konačni element 2: 3, 5, 19, 13, 4, 10, 16, 8 i 9, i
- konačni element 3: 11, 13, 19, 17, 12, 16, 18, 14, 15.

Redosled brojeva stepeni slobode (w_i, ϑ_{ix}, i ϑ_{iy}) glasi:

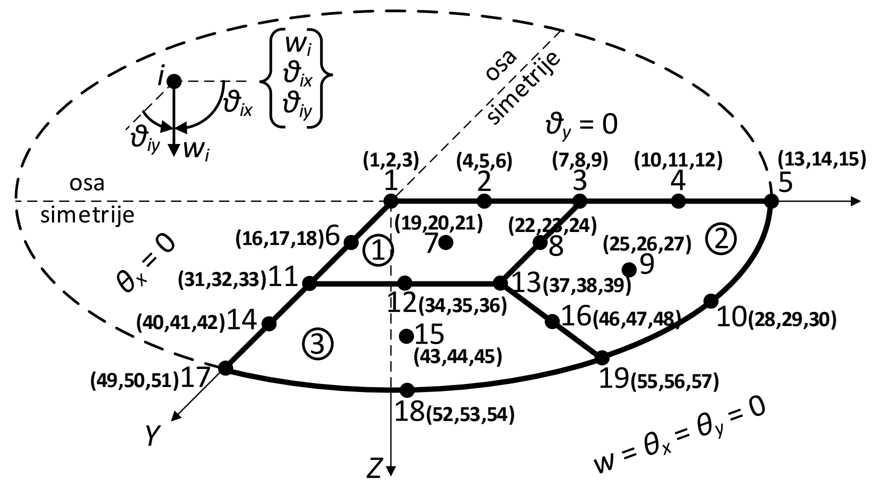
- konačni element 1: 1, 2, 3, 7, 8, 9, 37, 38, 39, 31, 32, 33, 4, 5, 6, 22, 23, 24, 34, 35, 36, 16, 17, 18, 19, 20 i 21,
- konačni element 2: 7, 8, 9, 13, 14, 15, 55, 56, 57, 37, 38, 39, 10, 11, 12, 28, 29, 30, 46, 47, 48, 22, 23, 24, 25, 26 i 27, i
- konačni element 3: 31, 32, 33, 37, 38, 39, 55, 56, 57, 49, 50, 51, 34, 35, 36, 46, 47, 48, 52, 53, 54, 40, 41, 42, 43, 44 i 45.

Brojevi aktivnih stepeni slobode: 1, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 47 i 48.

Komentar:
Matrica krutosti i vektor ekvivalentnog opterećenja određuju se numeričkom integracijom analogno kao u prethodnom primeru. Da bi se eliminisao *shear-locking* efekat primenjuje se selektivna integracija. Za deo matrice krutosti na savijanje red numeričke integracije je 3x3, a za deo matrice krutosti na smicanje 2x2

Izoparametarski KE. Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča. Primer 2

- **Kružna ploča**



$$\mathbf{k}_N^1 = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \cdots & 20 & 21 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccc} 34{,}9003 & 0{,}9348 & \cdots & 1{,}2464 & 1{,}2464 \\ & 0{,}0527 & \cdots & 0{,}0515 & -0{,}000556 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \text{sim.} & & 0{,}8383 & 0 \\ & & & & 0{,}8383 \end{array}\right]_{27\times 27} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 20 \\ 21 \end{array} \end{array} \cdot 10^4$$

$$\mathbf{k}_N^2 = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} 7 & 8 & \cdots & 26 & 27 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccc} 32{,}7638 & 0{,}9228 & \cdots & 1{,}2464 & 1{,}2464 \\ & 0{,}0573 & \cdots & 0{,}0566 & -0{,}000509 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \text{sim.} & & 0{,}8980 & 0{,}000490 \\ & & & & 0{,}8954 \end{array}\right]_{27\times 27} & \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ \vdots \\ 26 \\ 27 \end{array} \end{array} \cdot 10^4$$

$$\mathbf{k}_N^3 = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} 31 & 32 & \cdots & 44 & 45 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccc} 32{,}7638 & 0{,}9640 & \cdots & 1{,}2464 & 1{,}2464 \\ & 0{,}0573 & \cdots & 0{,}0564 & -0{,}000509 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \text{sim.} & & 0{,}8954 & 0{,}000490 \\ & & & & 0{,}8980 \end{array}\right]_{27\times 27} & \begin{array}{c} 31 \\ 32 \\ \vdots \\ 44 \\ 45 \end{array} \end{array} \cdot 10^4$$

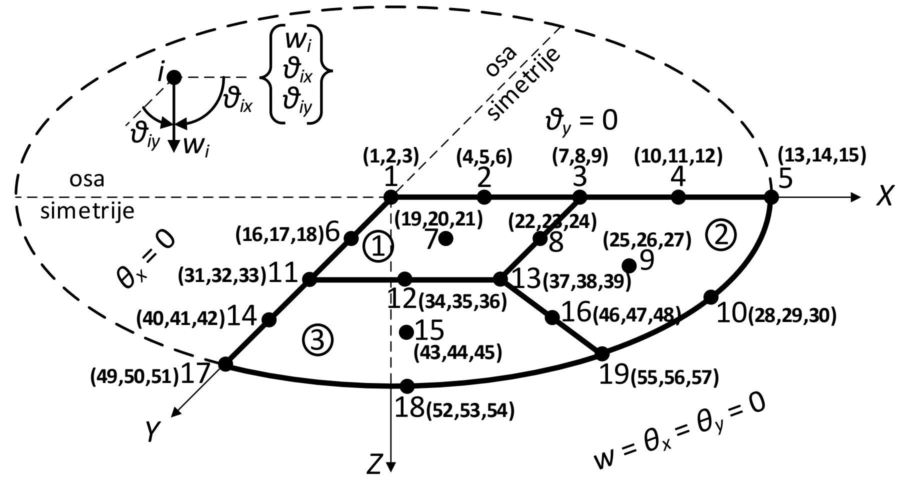
$$\mathbf{Q}^1 = \begin{array}{cc} \left\{\begin{array}{c} 0{,}0174 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0{,}2778 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}_{27\times 1} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 19 \\ 20 \\ 21 \end{array} \end{array} \quad \mathbf{Q}^2 = \begin{array}{cc} \left\{\begin{array}{c} 0{,}0190 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0{,}2971 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}_{27\times 1} & \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 9 \\ \vdots \\ 25 \\ 26 \\ 27 \end{array} \end{array} \quad \mathbf{Q}^3 = \begin{array}{cc} \left\{\begin{array}{c} 0{,}0190 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0{,}2971 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}_{27\times 1} & \begin{array}{c} 31 \\ 32 \\ 33 \\ \vdots \\ 43 \\ 44 \\ 45 \end{array} \end{array}$$

$$\mathbf{K}_{aa} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} 1 & 4 & \cdots & 47 & 48 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccc} 34{,}9003 & -2{,}4929 & \cdots & 0 & 0 \\ & 109{,}687 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \text{sim.} & & 0{,}3836 & 0{,}000597 \\ & & & & 0{,}3836 \end{array}\right]_{34\times 34} & \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ \vdots \\ 47 \\ 48 \end{array} \end{array} \cdot 10^4$$

Izoparametarski KE. Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča. Primer 2

- **Kružna ploča**

$$\mathbf{Q}_a = \mathbf{S}_a = \begin{array}{cc} \left\{\begin{array}{c} 0{,}0174 \\ 0{,}0694 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}_{34\times1} & \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ \vdots \\ 47 \\ 48 \end{array} \end{array} \qquad \mathbf{d}_a = \mathbf{K}_{aa}^{-1}\mathbf{S}_a = \begin{array}{cc} \left\{\begin{array}{c} 0{,}5056 \\ 0{,}4438 \\ \vdots \\ -0{,}6672 \\ -0{,}6672 \end{array}\right\}_{34\times1} & \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ \vdots \\ 47 \\ 48 \end{array} \end{array} \cdot 10^{-3}$$



$$w_1 = 0{,}5056 \cdot 10^{-3} \ \text{m}$$

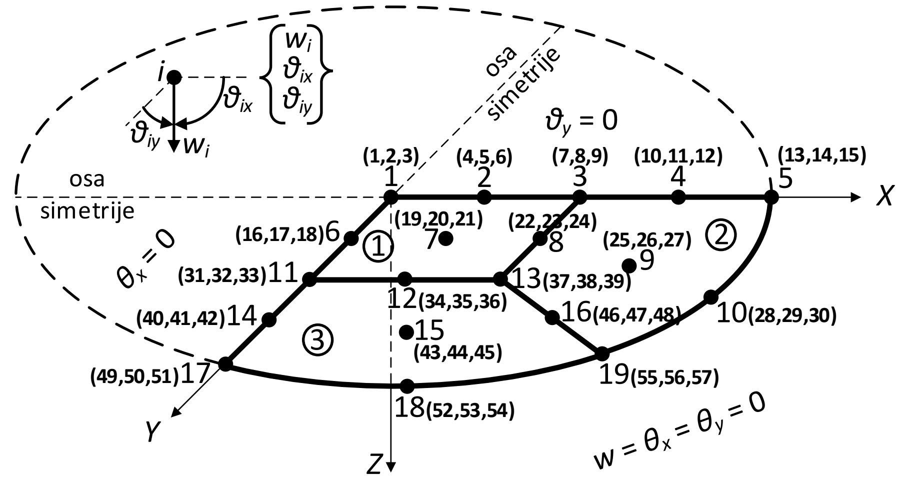
$$w_{1,\text{tačno}} = \frac{qr^4}{64K} = 0{,}5078 \cdot 10^{-3}\text{m}$$

S obzirom na odnos debljine i poluprečnika opravdano je usvojiti da je **ponašanje ploče prema klasičnoj teoriji**

$$w_{1,\text{tačno,Rajsner-Mindlin}} = \frac{qr^4}{64K}\left(1 + \frac{16}{5}\left(\frac{h}{r}\right)^2 \frac{1}{1-\nu}\right) = 0{,}5087 \cdot 10^{-3}\text{m}$$

Komentar:
Poređenjem tačnog rešenja za ugib centra ploče određenog prema klasičnoj i Rajsner-Mindlinovoj teoriji zaključuje se da je razlika mala (približno 0,2% u odnosu na tačno rešenje Rajsner-Mindlinove teorije), tj. pretpostavka da se ploča ponaša prema klasičnoj teoriji je opravdana

Izoparametarski KE. Rajsner-Mindlinova teorija savijanja ploča. Primer 2

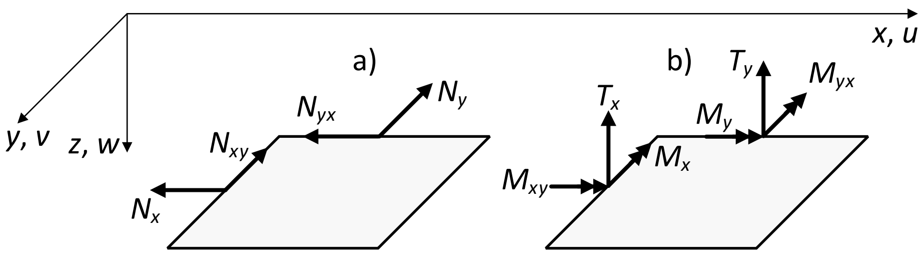


- **Kružna ploča**
- Ako bi u modelu promenili samo debljinu ploče na vrednost h=0,1m tada bi se za ugib centra ploče dobile sledeće vrednosti
  - tačno rešenje klasične teorije:
    - $w_{1,a} = 0{,}0005078 \cdot 10^{-3}\mathrm{m}$
  - tačno rešenje Rajsner-Mindlinove teorije:
    - $w_{1,b} = 0{,}0006007 \cdot 10^{-3}\mathrm{m}$
  - rešenje po MKE (Rajsner-Mindlinova teorija):
    - $w_{1,c} = 0{,}0005980 \cdot 10^{-3}\mathrm{m}$

Komentar:
Sada razlika između tačnih rešenja prema klasičnoj i Rajsner-Mindlinovoj teoriji ploča iznosi približno 15% u odnosu na rešenje Rajsner-Mindlinove teorije, tj. ploča se ne ponaša prema klasičnoj teoriji, što se moglo zaključiti na osnovu odnosa prečnika i debljine. Ugib prema klasičnoj teoriji je manji od tačne vrednosti, a to je posledica zanemarenja uticaja deformacije klizanja. Takođe, razlika između tačnog rešenja prema Rajsner-Mindlinovoj teoriji i rešenja određenog primenom MKE (Rajsner-Mindlinova teorija), iznosi približno 0,4% u odnosu na tačno rešenje, tj. postiže se zadovoljavajuća tačnost rešenja pri vrlo gruboj mreži

Ljuske. Ravni konačni elementi

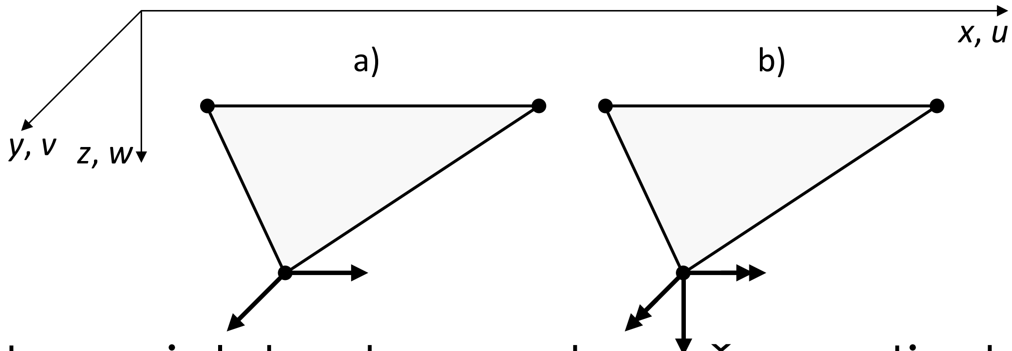
- U okviru linearne teorije kod ravnih KE mogu da se razdvoje membranske deformacije od deformacija savijanja
- Membranske komponente deformacija zavise samo od membranskih komponenata pomeranja
- Komponente deformacija od savijanja zavise samo od pomeranja w upravnog na površinu KE



- S obzirom na superpoziciju membranskog naprezanja i savijanja, matrica krutosti ravnog konačnog elementa određuje se superpozicijom matrice krutosti membranskog KE za ravansko stanje napona i matrice krutosti KE ploče pri savijanju

Ljuske. Ravni konačni elementi

- Trougaoni KE čijom superpozicijom se određuje KE za analizu ljuski, odnosno prikazan je KE za analizu ravanskog stanja napona (CST element sa 6 stepeni slobode) i nekonformni KE za analizu savijanja ploča sa 9 stepeni slobode



- KE ima 5 stepeni slobode u svakom čvoru, tj. ukupno 15 stepeni slobode pri čemu rotacija oko normale na površinu elementa (lokalna osa z) nije uključena u formulaciju
  - S obzirom na to potrebno je dodati stepen slobode, tj. ugao rotacije oko normale na površinu KE
  - S obzirom na to da ovaj stepen slobode nije uključen u formulaciju KE matricu krutosti je potrebno proširiti vrstama i kolonama koje odgovaraju stepenu slobode φ_{iz} (tzv. ***drilling d.o.f.***), pri čemu ovi elementi imaju vrednost nula. Stepenu slobode φ_{iz} odgovara fiktivna komponenta M_{iz} u vektoru ekvivalentnog opterećenja

Ljuske. Ravni konačni elementi. Trougaoni KE sa 18 stepeni slobode

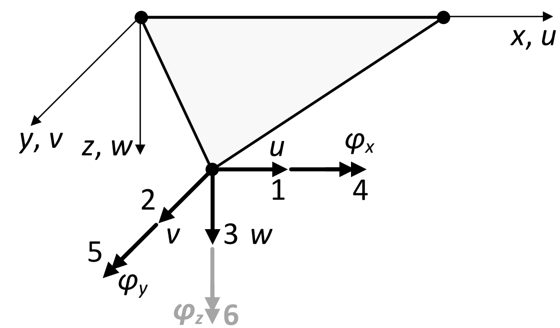
- Vektor generalisanih pomeranja i sila u čvorovima KE glase

$$\mathbf{d}^T = \{\mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2 \quad \mathbf{d}_3\}$$

$$\mathbf{d}_i^T = \{u_i \quad v_i \quad w_i \quad \varphi_{ix} \quad \varphi_{iy} \quad \varphi_{iz}\}, \qquad i = 1,2,3$$

$$\mathbf{R}^T = \{\mathbf{R}_1 \quad \mathbf{R}_2 \quad \mathbf{R}_3\}$$

$$\mathbf{R}_i^T = \{N_{ix} \quad N_{iy} \quad N_{iz} \quad M_{ix} \quad M_{iy} \quad M_{iz}\}, \qquad i = 1,2,3$$



- Jednačina KE glasi

$$\mathbf{kd} = \mathbf{Q} + \mathbf{R}$$

- Matrica krutosti određuje se superpozicijom matrice krutosti za analizu ravanskog stanja napona i matrice krutosti za savijanje ploče

$$\mathbf{k}^m = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{1,1}^m & \mathbf{k}_{1,2}^m & \mathbf{k}_{1,3}^m \\ \mathbf{k}_{2,1}^m & \mathbf{k}_{2,2}^m & \mathbf{k}_{2,3}^m \\ \mathbf{k}_{3,1}^m & \mathbf{k}_{3,2}^m & \mathbf{k}_{3,3}^m \end{bmatrix}_{6x6}$$

gde je $\mathbf{k}_{i,j}{}^m$ submatrica reda 2x2 pri čemu se oznake *i* i *j* odnose na brojeve čvorova KE, a oznaka *m* odnosi se na membransko stanje naprezanja

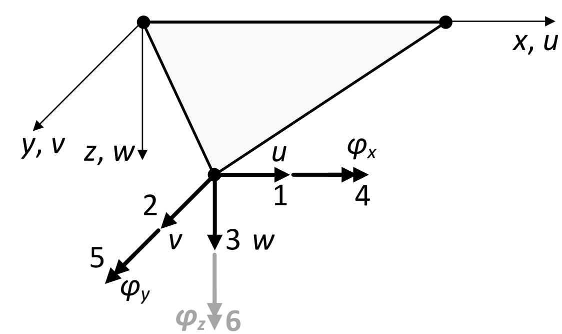
$$\mathbf{k}^b = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{1,1}^b & \mathbf{k}_{1,2}^b & \mathbf{k}_{1,3}^b \\ \mathbf{k}_{2,1}^b & \mathbf{k}_{2,2}^b & \mathbf{k}_{2,3}^b \\ \mathbf{k}_{3,1}^b & \mathbf{k}_{3,2}^b & \mathbf{k}_{3,3}^b \end{bmatrix}_{9x9}$$

gde je $\mathbf{k}_{i,j}{}^b$ submatrica reda 3x3 pri čemu se oznake *i* i *j* odnose na brojeve čvorova KE, a oznaka *b* odnosi se na stanje savijanja

Ljuske. Ravni konačni elementi. Trougaoni KE sa 18 stepeni slobode

- Matrica krutosti

$$\mathbf{k} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{čvor 1} & \text{čvor 2} & \text{čvor 3} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \mathbf{k}^m_{1,1} & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{k}^m_{1,2} & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{k}^m_{1,3} & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}^b_{1,1} & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{k}^b_{1,2} & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{k}^b_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{k}^m_{2,1} & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{k}^m_{2,2} & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{k}^m_{2,3} & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}^b_{2,1} & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{k}^b_{2,2} & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{k}^b_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{k}^m_{3,1} & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{k}^m_{3,2} & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{k}^m_{3,3} & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}^b_{3,1} & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{k}^b_{3,2} & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{k}^b_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]_{18x18} \end{array} \begin{array}{c} \text{čvor 1} \\ \\ \text{čvor 2} \\ \\ \text{čvor 3} \end{array}$$



Komentari:

- Matrica krutosti sadrži elemente koji imaju vrednost nula u tri vrste i tri kolone koje odgovaraju stepenu slobode φ_{iz}. Ako su u zajedničkom čvoru spojeni komplanarni elementi zbog nulte krutosti koja odgovara rotaciji oko ose z lokalnog koordinatnog sistema globalna matrica krutosti sistema KE postaje singularna.
- Ovo ima za posledicu potrebu za redukcijom jednačina sistema KE za broj čvorova u kojima su spojeni komplanarni elementi.
- Jedan od načina za rešavanje ovog problema je pridruživanje tzv. fiktivne rotacione krutosti oko normale na površinu komplanarnih KE, tj. uz stepene slobode φ_{iz} u matrici krutosti usvajaju se fiktivne rotacione krutosti čije su vrednosti dovoljne da se eliminiše singularitet matrice krutosti sistema KE, a da se ne utiče bitno na tačnost rešenja.
- Dodatno pojednostavljenje je da se, bez obzira na to da li su elementi spojeni u čvoru komplanarni ili ne, svim KE dodaju fiktivne rotacione krutosti uz stepene slobode φ_{iz}.
- U *Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Finite Element Method for Solids and Structural Mechanics, 6th Edition, Elsevier, 2006.* i *Cook R. D., Malkus D. S., Plesha M. E., Witt R. J., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, 2002.* mogu se naći preporuke.

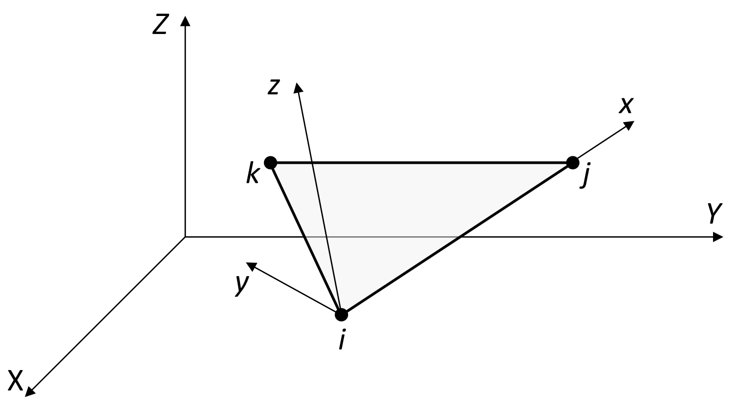
Ljuske. Ravni konačni elementi. Trougaoni KE sa 18 stepeni slobode

- Matrica transformacije

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{T}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{t} & 0 \\ 0 & \mathbf{t} \end{bmatrix}, \qquad i = 1,2,3$$

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \cos(x,X) & \cos(x,Y) & \cos(x,Z) \\ \cos(y,X) & \cos(y,Y) & \cos(y,Z) \\ \cos(z,X) & \cos(z,Y) & \cos(z,Z) \end{bmatrix}$$



- Analogan postupak kao i kod linijskih KE

Ljuske. Ravni konačni elementi

- Analognim postupkom mogu da se izvedu i drugi ravni konačni elementi za analizu ljuski. Na primer
  - **Pravougaoni KE** čija se matrica krutosti određuje superpozicijom dvodimenzionalnog pravougaonog KE koji ima 8 stepeni slobode (ravansko stanje napona) i nekonformnog pravougaonog KE koji ima 12 stepeni slobode za analizu savijanja ploča (dodaje se fiktivna rotaciona krutost oko normale na srednju površ) dobija se element sa 24 stepena slobode
  - **Izoparametarski četvorougaoni KE** čija se matrica krutosti određuje superpozicijom izoparametarskog četvorougaonog KE (ravansko stanje napona) i proizvoljnog četvorougaonog KE za analizu savijanja ploča

Ljuske. Ravni konačni elementi

- **Kod primene ravnih KE javlja se greška u aproksimaciji geometrije srednje površi tanke ljuske i greška u aproksimaciji polja osnovnih nepoznatih veličina u KE**
- **Nezavisnost membranskih deformacija i deformacija usled savijanja je nedostatak ravnih KE**
  - Na membranske deformacije pored komponenata pomeranja *u* i *v* utiče i komponenta pomeranja *w*. Povezanost membranskog naprezanja i naprezanja od savijanja ostvarena je na globalnom nivou kod susednih KE koji nisu komplanarni. U ovom slučaju membranske sile iz jednog elementa izazivaju i savijanje u susednom elementu, a momenti i transverzalne sile iz jednog elementa izazivaju i membransko naprezanje u susednom elementu. Greška se smanjuje sa povećanjem broja KE (progušćenje mreže) pri čemu diskretni model bolje aproksimira geometriju srednje površi ljuske